





~~31-1-87~~

30411

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio VII

Palchetto II

Num.° d'ordine 12

~~440 Bch~~

NAZIONALE

B. Prov.

R. BIBLIOTECA

VITT. EM. III

1937

NAPOLI



B-Prof.

H

1537

610990

DIVINAZIONE

SULLA

GEOMETRIA ANALITICA

DEGLI ANTICHI,

OVVERO

SUL METODO USATO DALLE GRECHE SCUOLE
NELLA RISOLUZIONE DE' PROBLEMI,

OPERA

DI GIUSEPPE SCORZA,

Professore di Matematica Sublime nella Reale Accademia
di Marina.

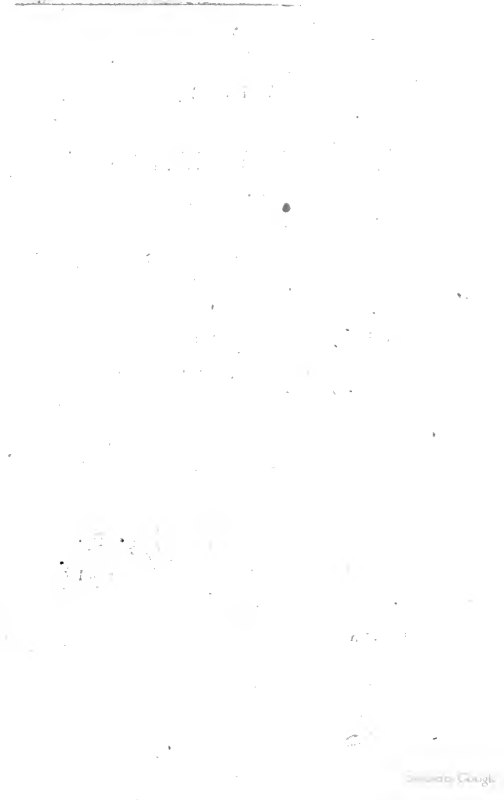
Sapientiam omnium antiquorum exquiret
Sapiens.....Eccles. c. 39. v. 1.



NAPOLI,

DALLA STAMPERIA REALE.

1823.



PREFAZIONE

DELL' AUTORE.



QUANTUNQUE volte , ornatissimi leggit-
tori , mi rivolgo a considerare il prospetto
magnifico dell'Analisi degli Antichi dise-
gnatone per avventura da Pappo Alessan-
drino nel settimo libro delle sue colle-
zioni , non posso non ammirare la sa-
pienza di que' sommi Geometri , che tante
sublimi opere seppero congegnare sul
luogo risoluto , affin di porgere per tal
modo ampia materia a coloro , che nelle
Matematiche acquistar vogliono forza , e
facoltà d'inventare. Così fossero a noi
pervenute codeste opere analitiche , ed
il tempo distruggitore delle cose non ci
avesse involato i più bei parti dell' uma-
no ingegno ! Certamente ci si renderebbe
ora assai più agevole la risoluzione de' geo-

metrici problemi, e non andremmo tuttavia smarriti, anche in quella de' più elementari, malgrado i ripieghi, che l'Algebra ne somministra. Allora potremmo ben conoscere l'attività della Geometria analitica degli Antichi, e paragonarla con quella de' moderni. Ma poichè le migliori opere attinenti al luogo risoluto non sono a noi giunte, ed appena pochi tratti di esse veggonsi adombrati da Pappo; da questi appunto, come dal filo di Arianna, dovremo far capo, se mai nobil vaghezza ci prenda, di voler conoscere le analitiche vie tenutesi dalle Greche scuole nella risoluzione de' problemi. Ecco il perchè io con grand' ansia presi a seguire le orme di sì pregiato scrittore, da che gustando per poco le matematiche, incominciai ad essere ammiratore degli Antichi, ed insieme a nutrire forte desio di volerm' istruire de' loro metodi d'inventare. Ma qui appunto fu dove incontrai difficoltà gravissime. Dapoi- chè le indicazioni, che ne fa Pappo delle opere analitiche degli Antichi in materie, a dir vero, assai difficili, e che abbisognerebbero di massimo sviluppo, là per

l'appunto sono quelle sgraziatamente tanto brevi, ed intralciate, e tal volta dal tempo si lacere, e corrotte, che ad intenderle hanno finora sudato invano i più acuti Matematici. Basti per tutti Edmondo Hallei preclarissimo Geometra Inglese, e delle opere degli Antichi assai intelligente, il quale forte dolendosi dell'oscurità di Pappo specialmente nella descrizione, ch'ei fa de' porismi di Euclide, a ragione ebbe a dire, che delle indicazioni di lui poco, o niente potevano giovarsi i Matematici, scrivendo egli a tal proposito, *porismatum descriptio nec mihi intellecta, nec lectori profutura* (1). Cosa dunque farmi dovea, non essendomi dato di approfittarmi della guida di Pappo, che al maggior uopo vien meno? Tentare forse nuovi mezzi, onde penetrare in sì oscuro laberinto dell'analisi degli Antichi, ovvero ristarmi dal concepito impegno, disperando poter conoscere una volta le vie analitiche segnate qui tra noi da Aristeo, e da Archita nella scuola del gran

(1) Hallei de sectione rationis pag. 37.

Pitagora ? Ma ecco in tale perplessità di animo il mezzo , che mi si offrì , atto a rianimare la mia abbattuta speranza , e fu appunto l' andar' escogitando tra le molteplici vie delle risoluzioni de' problemi le più adattate all' uopo , e quelle , nelle quali avessi potuto a fortuna incontrare qualche traccia de' metodi degli Antichi : in quell' istessa guisa , che un' accorto viandante trovandosi in deserta , e vasta campagna , ove da un vicino monte appena gli è dato mirare da lungi un piccolo abituro , nè scovrendo egli strad' alcuna battuta , che a quel bramato luogo il menasse , prima di avvolgersi per gl' ignoti , ed aspri sentieri , si delinea bene in sua mente la direzione , che più opportuna gli sembri al suo disegno ; e cammin facendo se mai gli avvenga di scorgere per avventura vestigia d' uomo , allora ei tosto si riconforta , e con nuova lena proseguendo la sua carriera più non dubita essere quella la via , che al desiato fine il conduca. Così , e non altrimenti è a me avvenuto , leggitori ornatissimi. Dapoichè vago essendo

di conoscere la sublimè Geometria analitica de' Greci , che nelle loro immortali opere si lascia appena da lontano scovrire , m' imbattei a dover risolvere alcuni malagevoli problemi di terzo , e quarto grado : nella analisi de' quali procedendo per quelle vie geometriche , che più proprie , e più conducevoli mi sembravano all' uopo , mi avvidi la loro composizione ridursi a quella d'alcuni luoghi solidi , che mi avrebbero eziandio agevolato l'analisi di molti altri problemi , e che a volerli risolvere col metodo de' moderni avrei dovuto affaticarmi non poco. Sicchè speculando allora più attentamente , e da vicino codesti luoghi , mi accorsi per avventura , che la loro composizione a quella tendea de' luoghi alle linee sì ricercata dagli antichi al riferir di Pappo. Altro non vi volle , perchè a queste tracce tosto comprendessi , qual mai erane la desiata via analitica degli Antichi , quale il loro grandioso disegno in quelle sublimi ricerche de' luoghi alle linee , e come per questo mezzo abbreviar si potea grandemente la risoluzione

de' problemi. Onde non più dubitando di aver finalmente divinato quel metodo, che con tanto successo fu praticato dalle Greche scuole, mi posi con più lieto animo a riprendere il mio cammino, e non senza gravi fatiche mi riuscì di giungere non solo alla risoluzione de' proposti problemi; ma benanche a stabilire que' luoghi solidi indicati appena da Pappo, ed altri luoghi ancora ad essi analoghi per compiere in tal modo un argomento, che formava certamente l'oggetto delle più intense cure degli antichi Geometri nel luogo risoluto. Se non che volendo far dono di tali cose agli Amatori delle Matematiche, non lasciai, com'era mio debito, di comunicarne tutto il disegno al mio onorato Maestro il Signor D. Niccolò Fergola, lume chiarissimo della Napoletana letteratura, il quale ne approvò il lavoro annunziandolo finanche nell'insigne sua opera de' luoghi geometrici già pubblicata (1). Quindi ardisco di

(1) In Napoli l'anno 1818 per le stampe della Reale Accademia di Marina.

presentarvi ora queste mie qualunque sienti fatiche, leggitori umanissimi, destinate, se il pensier non erra, a riaccendere lo spirito del greco geometrizzare, di cui si pregiarono mai sempre i nostri ingegni Partenopei. E sarò pago, se questo mio lavoro possa mai destare l'attenzione de' sommi Geometri a produrre cose migliori. Intanto per procedere con ordine divido quest' opera in tre parti. Nella prima anderò rintracciando in tre distinti capitoli; primo, la natura de' Geometrici luoghi, i loro differenti generi, e quelli delle loro specie, ch' erano principalmente considerate da' Geometri nel luogo risoluto; secondo andrò divisando l' uso estesissimo de' detti luoghi nella risoluzione de' problemi; e terzo i varj ordini di essi: tre grandiosi argomenti, che l' idea somministrano, e l' orditura, quasi di tutto il luogo risoluto (1). Nella

(1) Questi tre capitoli furono da me letti successivamente alla Reale Accademia delle scienze ne' giorni 6, e 9 di Settembre, e 22 di Novembre dello scorso anno 1822.

seconda parte poi esporrò i principj di questo metodo riguardo alla risoluzione de' problemi solidi. E finalmente nella terza applicherò detto metodo a risolvere varj problemi; affinchè si vegga col fatto quanto sia preclara, ed attiva l'Analisi degli Antichi.

DIVINAZIONE
SULLA
GEOMETRIA ANALITICA
DEGLI ANTICHI.

P A R T E P R I M A .

*Esposizione del metodo analitico
degli Antichi.*

CAPITOLO PRIMO.

Della natura de' luoghi.

§. 1. **V**ENENDO ad esporre quel, che mi ho proposto in questa prima parte, per procedere con ordine dovrò sulle prime andar rintracciando la natura de' luoghi, e poi quella delle loro specie, ch' erano considerate principalmente da' Geometri nel luogo risoluto. Dico adunque, che il luogo generalmente preso non è altro, se non che, *il sito che si ha nello spazio*. Esso però varia, secondochè nelle quistioni Geometriche variano le condizioni de' dati, e de' quesiti. Così può avvenire, che il punto sia luogo del punto, la linea

della linea, ed il solido del solido, quando questi cioè per la natura della quistione hanno sempre lo stesso luogo, ovvero al dir di Euclide, ne sono dati di sito. Ma non avendo essi lo stesso luogo, e scorrendone altrove, può darsi che il punto scorra la linea, la linea la superficie, e la superficie il solido, ovvero che il punto trascorra la superficie, e la linea il solido. Per cui n' emergono tre differenti generi di luoghi, che con somma avvedutezza furono conosciuti dagli Antichi, e chiamati altri *efectici*, altri *diexodici*, ed altri *anastrofici*. Di cui eccone le distinte definizioni.

§. 2. I luoghi *efectici* sono il punto, la linea, la superficie, ed il solido, allorchè questi sono luoghi di loro stessi, cioè il punto è luogo del punto, la linea della linea, la superficie della superficie, ed il solido del solido. Ma quando poi la linea è luogo del punto, la superficie della linea, e 'l solido della superficie; allora tali luoghi sono *diexodici*. E finalmente quando avviene, che la superficie sia luogo del punto, e 'l solido della linea, allora questi luoghi sono detti *anastrofici*.

§. 3. Così per illustrare questi tre differenti generi de' luoghi con degli esempi più ovvj, supponiamo che da un punto dato fuori di una data retta le si voglia abbassare la perpendicolare. Sarà chiaro essere luoghi *efectici* quelli de' dati di un tal problema, cioè del dato punto, e della data retta, perchè per la natura della questione essi

non possono cambiar luogo; essendo questo già stato assegnato nel problema. Similmente, perchè la perpendicolare richiesta è una sola, e determinata, non potrà ella avere altro luogo fuori di se stessa, e perciò il luogo di una tal perpendicolare è anche efetico, o sia detta perpendicolare è ancora data di sito. Ma se poi alla data retta vogliasi innalzare la perpendicolare da un punto dato in essa, allora questa perpendicolare non è una sola, e determinata; ma bensì sono infinite le perpendicolari, le quali, come ha dimostrato Euclide, giacciono tutte in uno stesso piano perpendicolare alla data retta; e perciò questo piano, ove va scorrendo la perpendicolare richiesta, è il luogo di lei, e propriamente il luogo diexodico. Che se finalmente si proponga ritrovare un punto, da cui la perpendicolare abbassata a quella data retta di sito sia di una data grandezza, ognuno vede non essere un solo il punto richiesto, ma bensì poters' il medesimo prendere dovunque nella superficie di quel cilindro retto, il cui asse sia la data retta di sito, ed il raggio della di lui base sia di quella data grandezza; e quindi non è una sola la perpendicolare richiesta, ma sì bene infinite, le quali perpendicolarmente all' asse ne vanno trascorrendo l'intera solidità del Cilindro: vale a dire, che il luogo del punto in questione è la superficie del detto Cilindro, e'l luogo della richiesta perpendicolare è la solidità di esso. E però tali luoghi sono anastrofici.

§. 4. Ora spiegate in tal modo queste cose ben s'intende ciò, che abbia voluto dire Pappo Alessandrino nel settimo libro delle sue Collezioni Matematiche, ove nell' articolo de' luoghi piani introduce si favellando generalmente de' luoghi, e delle loro differenti specie con delle oscurissime parole, che io quì ne reco secondo la versione del Commandini: *locorum omnium*, ei dice, *alii sunt εφελττοι, hoc est in se ipsis tantum consistentes, de quibus et Apollonius ante propria elementa dicit puncti quidem locum esse punctum, lineae locum lineam, superficiei superficiem, et solidi solidum, alii autem διεξοδιτοι, hoc est sese extra tendentes, ut puncti locum lineam, lineae superficiem, superficiei solidum. alii αναστροφτοι, ut puncti locum superficiem, et lineae locum solidum.* Su di che bisogna notare, che codesti luoghi efectici quivi mentovati da Pappo, e di cui anche Apollonio dice essere il punto luogo del punto, la linea della linea, la superficie della superficie, e'l solido del solido, non sono altro a buon conto, se non che il punto, la linea, la superficie, e'l solido, che non possono mutare luogo, o sia come dice Euclide, che sono dati di sito. Imperciocchè questo sommo Geometra volendo indicare nella quarta definizione de' dati, quali sieno i punti, le linee, e gli angoli, che chiamansi dati di sito, dice espressamente essere quelli, che hanno sempre l'istesso luogo, e vuol quì intendere, che poste le me-

desime condizioni de' dati , e de' quesiti non possono cambiar luogo , e ciò a differenza di que', che per le condizioni richieste non possono avere un luogo determinato e fisso , ma bensì indeterminato , e vago , sia questo diexodico , ovvero anastrofico , come già s'è detto di sopra.

§. 5. Intanto Pappo nel citato luogo sì ne prosiegue. a dire: *locorum autem, qui inresoluto loco, alii autem plani dicti, et solidi, et lineares: διεξοδικοί vero sunt punctorum, et alii ad superficies αναστροφικοί, quidem punctorum διεξοδικοί autem linearum, lineares loci ex iis qui sunt ad superficies demonstrantur. Dicuntur autem plani loci tum hi, de quibus agemus, tum universe quicumque sunt rectae lineae, vel circuli. Solidi loci quicumque sunt conorum sectiones, parabolae, vel ellipses, vel hyperbolae, lineares loci quicumque lineae sunt, neque rectae, neque circuli, neque aliqua dictarum coni sectionum.* Colle quali parole dà egli ad intendere, quali erano mai le principali specie de' luoghi, che si consideravano dagli Antichi, ch'è quello appunto, che mi ho proposto a divisare in secondo luogo. Dico adunque, che non sono tutte le specie di codesti tre generi di luoghi, che formavano l'oggetto delle speculazioni de' Geometri nel luogo risoluto; ma sì bene quelle soltanto, che riguardano principalmente i punti, e le linee. Imperciocchè le specie de' luoghi efectici considerate da Euclide nel suo libro de' dati, come s'è ve-

duto di sopra altro non riguardano , se non che i punti , le linee , e gli angoli , che per aver i luoghi fissi , e determinati , giustamente furono detti dati di sito. Similmente le specie degli altri due generi de' luoghi considerate da Geometri riguardano ancora i punti , e le linee. Dapoichè essi al riferir di Pappo consideravano solamente i luoghi diexodici , ed anastrofici de' punti , ed i soli luoghi diexodici delle linee. E perchè i luoghi diexodici de' punti non sono , che linee , perciò furono detti *luoghi alle linee* ; ed i luoghi anastrofici de' punti , ed i luoghi diexodici delle linee , avvegnachè superficie , furono detti *luoghi alla superficie*. Quindi saggiamente gli antichi Geometri distinsero varie specie di sì fatti luoghi secondo la varietà delle linee , e delle superficie. In fatti per parlare solamente de' luoghi alle linee , siccome di queste giusta la distinzione fattane da essi , altre erano dette *piane* , perchè si concepiscono semplicemente nel piano , come sono le linee rette , e le circonferenze de' cerchi ; altre erano dette *solidi* , perchè si concepiscono nella sezione del piano e del cono , che l'è un solido elementare , come sono le parabole , l'ellissi , e le iperboli , ed altre finalmente erano dette *lineari* , perchè si concepiscono generate in varie e diverse guise , come sarebbero tutte quelle linee differenti dalle anzidette : così de' luoghi altri furono detti *piani* , altri *solidi* , ed altri *lineari*.

§. 6. Si dissero luoghi piani tutti quelli , che

sono *linee rette*, e circonferenze di cerchi. *Luoghi solidi* tutti quelli, che sono sezioni coniche, cioè parabole, ellissi, ed iperboli. Finalmente si chiamarono *luoghi lineari* quelli, che sono linee differenti dalle anzidette.

§. 7. Poste queste cose ben si scorge qual sia la natura de' luoghi considerati principalmente dagli Antichi nel luogo risoluto. Essi non sono altro secondo Pappo, se non che i luoghi piani, solidi, e lineari, ed i luoghi alle superficie, cioè i luoghi diexodici, ed anastrofici de' punti, ed i luoghi anastrofici delle linee, i quali a buon conto sono le linee, per cui scorrono i punti, e le superficie, per cui scorrono le linee, o trascorrono i punti. Lo che però si deve intendere di que' punti, e di quelle linee, che si richieggono per la risoluzione de' quesiti.

§. 8. Così quante volte nelle questioni Geometriche avviene, che per la loro soluzione si richieggono tali punti, o tali linee, che non hanno un luogo fisso, e determinato, ma indeterminato; e vago, percorrendone delle intere linee, o delle intere superficie; allora non sono solamente determinati punti, o determinate linee, che risolvono i quesiti, ma bensì sono i luoghi di tutte quelle linee, o di tutte quelle superficie, ch' essi percorrono: e perciò queste linee, e queste superficie da' Geometri furono dette propriamente *luoghi*, i quali si potrebbero ancora più esplicita-

mente definire, dicendo, ch' essi non sono altro se non che i *siti delle linee o delle superficie*, che risolvono le *questioni proposte*.

§. 9. Una tale definizione ci fa intendere con chiarezza ciò, che ne viene indicato da Eutocio Ascalonita ne' suoi commentarj su i conici di Apollonio Pergco, ove esponendo egli la lettera ad Eudemo, nel dare idea delle specie di sì fatti luoghi, si esprime in questo modo: *planos locos antiqui Geometrae appellare consueverunt quando non ab uno dumtaxat puncto, sed a pluribus problema efficitur; ut si quis proponat: Data recta linea terminata invenire punctum, a quo ducta perpendicularis ad datam lineam inter ipsius lineae partes media proportionalis constituatur. Locum vocant hoc ipsum*: dove si noti essersi quivi alquanto cambiata la versione del Commandini. Imperciocchè nel codice Greco si leggono queste precise parole. *Επιπεδους τοπους εδος τοις γεωμετραις λεγειν, οτεται προβληµατων εκ αφ' ενος σημειου μονοι, αλλ' απο πλειονων γινεται το ποιηµα. οιον εν επιταξει, της ευθειας δοθεισης πεπερασµενης ευρειν το σημειον αφ η αχθεισα καθετος επι την δοθεισαι µεση αναλογος γινεται των τμηµατων. τοποι καλυσσι το τοιυτον*. Ora questa parola *το τοιυτον* non si riferisce a *τοποι*, per cui egli tradusse oscurementemente, *locum ejusmodi vocant Geometrae*; ma bensì si riferisce ad *ευρειν* per significare, che i Geometri chiamano luogo *το τοιυτον ευρειν* quella tale ricerca, o sia quel che risolve il pro-

blema proposto, e che secondo la rapportata definizione ben s'intende essere un luogo: *quoniam*, come ne soggiunge lo stesso Eutocio, *non unum dumtaxat est punctum, quod problema efficit, sed locus totus, quem habet circumferentia circuli circa datam rectam lineam, veluti circa diametrum descripti: si enim in data recta linea semicirculus describatur; quodcumque in circumferentia sumpseris punctum, et ab ipso perpendicularem ad diametrum duxeris, quod propositum est, efficiet. Similiter autem data recta linea, si quis proponat invenire extra ipsam punctum, a quo rectae ad ejus extrema ductae inter se aequales sint: et in hoc non unum dumtaxat est punctum, problema efficiens, sed locus, quem continet lineae a puncto medio lineae datae ad rectos angulos ducta. Nam si data linea bifariam secetur, et ab eo puncto linea ad rectos ducatur angulos, quodcumque in ipsa sumseris punctum, aciet illud, quod proponebatur. Simile quiddam, et ipse Apollonius in resolutio loco scribit. Datis duabus rectis lineis in plano, punctisque datis, et data proportionem inaequalium linearum, potest in plano circulus describi, ita ut lineae a datis punctis ad circumferentiam circuli inclinatae proportionem habeant eandem datae proportioni. Loci igitur plani ejusmodi sunt: solidi vero loci appellantur ex eo, quod lineae, per quas ipsorum problemata efficiuntur, a solidorum sectione generationem habent, qua-*

les sunt conè sectiones , et complures aliae. Sunt etiam aliè loci ad superficiem dicti, quibus ex eorum proprietate nomen impositum est.

§. 10. Qui però è da notarsi, che sì fatti problemi indicati da Eutocio, come ancora que' due ultimi problemi delle perpendicolari rapportati di sopra, perchè in essi si effettua il quesito dal luogo di una linea, ovvero d'una superficie, si possono chiamare per maggior chiarezza *problemi locali*; nella stessa maniera, che secondo il linguaggio degli Antichi chiamansi ancora *teoremi locali* quelli, che si verificano per tutto il luogo di una linea, ovvero di una superficie. Come sarebbero tra gli altri que' teoremi del primo libro degli elementi, in cui Euclide dimostra essere uguali i parallelogrammi, ed i triangoli costituiti sulla stessa base o sopra basi uguali, e fra le medesime parallele. Imperciocchè sopra le medesime basi, e tra le medesime parallele si possono intendere costituite infinite di tali figure, le quali sempre si mostreranno eguali tra loro; e perciò i detti teoremi si verificano per tutto il luogo delle dette parallele: onde sono essi *teoremi locali*, siccome per la medesima ragione sono ancora teoremi *locali* le di loro proposizioni converse, e quelle altre ad esse analoghe, che dimostra Euclide nel terzo libro degli elementi, cioè a dire, che gli angoli costituiti nella stessa porzione di cerchio sono uguali tra di loro, e che gli angoli costituiti nel semicerchio sono

retti. Su di che ecco l'eccellente sviluppo, che ne ha fatto un antico Geometra, che visse nel quinto secolo della nostra Era Cristiana, voglio dire il famoso Proclo. Diadoco di Licia, il quale nel suo accuratissimo commentario sul I.^o libro degli elementi rapporta per avventura la distinzione de' teoremi, che faceano gli antichi Matematici in teoremi *locali*, e *non locali*, ove esponendo egli la proposizione trigesima quinta, ch'è la prima specie de' teoremi locali, che s'incontrano neg'li elementi, in tal maniera definisce siffatti teoremi, e ancor li distingue: *voco autem*, ei dice secondo la versione del Barocci, (*theoremata*) *localia quidem, quibuscumque idem symptoma in toto quodam loco accidit: locum vero lineae, vel superficiei situm, qui unum, idemque symptoma efficiat. Localium enim alia quidem in lineis constituuntur, alia vero in superficiebus. Et quoniam linearum aliae quidem sunt planae, aliae vero solidae, planae quidem quarum simplex est in plano intelligentia, ut ipsius rectae: solidae vero, quarum ortus ex quadam solidae figurae sectione apparet, ut Cylindricae Helicis, conicarumque linearum, dicere utique eorum etiam, quae in lineis constituuntur, Localium theorematum, alia quidem planum habere locum, alia vero solidum. Praesens igitur theorema, et locale est, et in lineis locale, et planum: Totum enim spatium, quod iacet inter parallelas, locus est parallelogrammorum, quae super eadem basi constituuntur:*

quae sane aequalia quoque inter se *Elementorum* institutor ostendit. Eorum autem localium theorematum, quae solida vocantur, tale sit exemplum. *Parallelogramma*, quae in lineis non coincidentibus, et hyperbole inscribuntur, aequalia sunt. Quod enim hyperbole solida sit linea, patet, Coni siquidem linea est. Hujusmodi itaque theoremata (ut ait *Geminus*) ideis *Chrysippus* assimilabat; nam quemadmodum illae infinitorum terminatis in finibus ortum comprehendunt, ita in his quoque infinitorum terminatis in locis comprehensio fit, et per hunc terminum aequalitas apparet: altitudo enim parallelarum eadem manens, si infinita super eadem basi parallelogramma intelligantur, omnia sibi invicem aequalia ostendit. Primum itaque locale theorema *Elementorum* institutor praesens adscripsit: et videtur cum admodum elementi juxta omnes divisiones theoremata varietate distinguat, jure neque hujusmodi ipsorum ideam praeternüsisse. Verumtamen cum in praesentia quidem de rectilineis sermo sit, localia plana in rectis lineis theoremata tradit: in tertio autem libro cum ea, quae de circulis, eorumque symptomatibus contemplari possunt pertractet, ea etiam, quae in circumferentiis constituuntur localium simul, et planorum theorematum docebit: tale siquidem in illis est quod ait: Qui in eodem segmento sunt anguli, inter se sunt aequales; nec non illud, quod ait: Anguli,

*qui in semicirculo, recti sunt: nam si infiniti qui-
dem anguli in circumferentia constituti fuerint:
eadem existente basi, omnes ostenduntur esse ae-
quales. Si vero quod a basi, et circumferentia com-
prehenditur, semicirculus fuerit, recti omnes esse
ostenduntur: et illa quidem proportionem respon-
dent triangulis, et parallelogrammis, quae super
eadem basi, et in eisdem sunt parallelis. Species
igitur theorematum proxime quaerendorum talis
est, quae localis apud antiquos Mathematicos
nuncupatur.*

§. 11. Innanzi però di chiudere questo capitolo notinsi due cose: primo, che Proclo, ed Eutocio non parlano de' luoghi lineari; e ciò perch' essi gl' in-cludono ne' luoghi solidi, prendendoli in un senso più esteso a differenza di Pappo, che per luoghi solidi ne intese per eccellenza quelli, che nascono dalla sezione del piano, e del cono, e non già quelli che nascono dalla sezione de' solidi in generale: secondo riflettasi, che Proclo considera i luoghi, che occorrono ne' teoremi, ed Eutocio que'li che occorrono ne' problemi. Questo significa, che sì fatti luoghi possono occorrere ne' problemi non meno, che ne' teoremi: perciò gli antichi Geometri, come abbiamo da Pappo, consideravano le ricerche di cotestì luoghi, come una specie di porismi, che si possono esprimere in forma di problemi, e di teoremi. La qual cosa è di bene, che s' illustri con qualch' esempio de' più facili per l' intelligenza degli Antichi.

§. 12. Suppongasi, che taluno proponga ritrovare un punto, da cui le rette tirate a due punti dati formino tra loro un angolo retto. Analizzando un tal problema si rileverà di leggieri, che unita la retta tra i punti dati, questa congiungente, ed i lati dell'angolo in quistione formeranno un triangolo, i di cui angoli alla base presi insieme debbono uguagliar l'angolo al vertice, che per ipotesi è retto. Adunque se da questo angolo se ne tagli mediante la retta tirata dal vertice insino alla base una porzione uguale ad uno de' due rimanenti angoli del triangolo, e dalla stessa sua parte, sarà la rimanente porzione dell'angolo retto uguale al rimanente angolo del triangolo; e quindi essa retta pareggerà ciascuna delle due parti, ch'ella ne tronca dalla base, la quale perciò resterà bisecata nel punto, ove quella retta l'incontra, e per conseguenza l'estremo di questa tanto dista dal punto medio della base, quanto questo punto medio dista dagli estremi di essa base; e però esso può prendersi ad arbitrio nella periferia del cerchio descritto sulla congiungente de' punti dati, come intorno al diametro. Vale a dire non è un solo punto, che risolve il proposto problema, ma è tutto il luogo, che occupa la periferia del detto cerchio; e perciò una tale ricerca dee dirsi un *luogo*. Nondimeno per la proprietà bellissima, che vi si contiene riguardo all'angolo costituito nel semicerchio, che l'è sempre retto, il mede-

simo luogo si può benanche proporre in forma di teorema, come appunto lo ha eseguito Euclide nella trigesima prima proposizione del terzo de' suoi Elementi.

CAPITOLO SECONDO.

Dell' uso de' luoghi.

§. 13. **E**sposta la natura de' luoghi nel primo capitolo, debbo ora in quest' altro mostrare il loro uso; il quale quanto siane esteso si conoscerà di leggieri, riflettendo sul modo da tenersi nella risoluzione de' problemi. A qual proposito ecco quello, che ne lasciò scritto Pappo Alessandrino nel principio del settimo libro delle sue Matematiche Collezioni, ove parlando egli delle due vie, dell' Analisi cioè, e della Sintesi, per cui si procede nel luogo risoluto, si ne prosiegue a dire: *Resolutio igitur est via a quaesito tamquam concesso per ea, quae deinceps consequuntur ad aliquod concessum in compositione: in resolutione enim id quod quaeritur tamquam factum ponentes, quid ex hoc contingat, consideramus: et rursus illius antecedens, quousque ita progredientes incidamus in aliquod iam cognitum, vel quod sit e numero principiorum. Et huiusmodi processum resolutionem appellamus, veluti ex contrario factam*

resolutionem. In compositione autem per conversionem ponentes tamquam iam factum id, quod postremum in resolutione sumpsimus: atque hic ordinantes secundum naturam ea antecedentia, quae illic consequentia erant; et mutua illorum facta compositione ad quaesiti finem pervenimus, et hic modus vocatur compositio. Duplex autem est resolutionis genus, alterum quidem, quod veritatem perquirat et contemplativum appellatur: alterum vero, quo investigatur id quod dicere proposuimus, vocaturque problematicum. In contemplativo igitur genere quod quaeritur, ut jam existens, et ut verum ponentes per ea, quae deinceps consequuntur tamquam vera, et quae ex positione sunt, procedimus ad aliquod concessum, quod quidem si verum sit, verum erit et quaesitum; et demonstratio, quae resolutioni ex contraria parte respondet. Si vero falso evidenti occurramus, falsum erit et quaesitum. In problematico autem genere, quod propositum est, ut cognitum ponentes, per ea, quae deinceps consequuntur, tamquam vera, procedimus ad aliquod concessum, quod quidem si fieri, compararique possit (quod datum vocant Mathematici) etiam illud, quod propositum est, fieri poterit, et rursus demonstratio resolutioni ex contraria parte respondens. At si evidenti, quod fieri non possit, occurramus: et problema itidem fieri non poterit. Ch' è quanto a dire: nell' analisi si dee supporre

quel che si cerca, esaminando le conseguenze, che nascono da una tale supposizione, finchè una tra loro se ne rinventa, che sia vera, o falsa, possibile, ovvero impossibile, secondochè l'analisi riguardi un problema, ovvero un teorema; o ch'è lo stesso, come prosiegue a dire Pappo, al genere teorematico ella si appartenga, ovvero al genere problematico. Ma perchè un tale sviluppo dell'analisi assai generalmente n'è indicato da Pappo, nè vi si assegna un termine fisso, onde non si erri in questo cammino, certamente il più glorioso per lo spirito umano, in cui al dir de' Filosofi si giunge alla cognizion del vero, supponendosi noto quel che non sapeasi da prima; però è di bene, che io quì giusta il mio disegno con più particolarità ne dimostri cotesto analitico progresso, riguardando più da vicino quel, che dee farsi nella risoluzione de' problemi. Dico adunque, che si debba esaminare in tutte le sue parti quella costruzione, che si ricerca nel problema proposto, supponendola come già fatta, e vedendone la dipendenza che le dette parti hanno tra loro, finchè pervengasi a fissare un punto, che sia per così dire il cardine della quistione, in quanto che basta, ch'ei sia determinato, perchè poi vice versa da esso tutto il resto della costruzione facilmente vi discenda. Un tal punto, che può dirsi *punto di riduzione*, dee avere alcune condizioni, che traggonsi dalla natura stessa del problema, e che dirò *locali*, perchè determinano il luogo di esso

punto. Ciò l'è manifesto in certi problemi dalla loro medesima enunciazione, come in quelli, che da Eutocio ne ho recati di sopra. Ma in tanti altri, sebbene non vi appariscano a prima fronte nè i punti di riduzione, nè le condizioni locali, che questi debbono avere, pur tuttavia vi si rileveranno tali cose, sol che di essi problemi sviluppinsi convenevolmente i dati, ed i quesiti.

§. 14. Così per illustrare questo che ho detto con degli esempli più facili: se taluno proponga sopra una data retta terminata costruire un triangolo isoscele: in questo problema non vi si esprime certamente qual siane il punto di riduzione, ma per poco però, che vi si rifletta, ben si vede, ch'ei siane il vertice del triangolo; perchè da esso tirate le rette agli estremi della data base, si verrà immantinente a compiere il richiesto triangolo, il quale per essere isoscele ne fa veder chiaramente la condizione, che dee avere un tal vertice, cioè che le sue distanze dagli estremi della data retta debbano essere uguali tra loro. Ed una tal condizione, come l'è chiaro, n'è locale, perchè dimostra il luogo del detto vertice potersi prendere ad arbitrio nella perpendicolare alla data base, che le s'inalza dal punto medio. Ma se poi sulla data retta terminata si volesse costruire il triangolo equilatero, allora il vertice di questo triangolo dovrebbe avere due condizioni; cioè le di lui distanze dagli estremi della base dovrebbero essere uguali tra loro, e ciascuna alla data retta: e

quindi per sì fatte condizioni dovrà esso allogarsi in due circonferenze di cerchi, che descrivonsi prendendo per loro rispettivi centri gli estremi della data retta, e questa medesima retta per loro rispettivi intervalli. E perchè il detto punto non si può ritrovare in due differenti luoghi nello stesso tempo, perciò dall' intersezione di essi cerchi resterà un tal punto convenevolmente determinato.

§. 15. Similmente analizzando altri problemi vi si potranno ancora rilevare da' dati, e da' quesiti, quali siano i loro punti di riduzione, e le condizioni locali, che questi debbono avere. In tal maniera, se mal non mi appongo, que' primi Geometri, che dopo il divino Platone occuparonsi a stabilire i fondamenti del metodo analitico, poterono con una facile induzione ravvisare, che tutta la difficoltà di risolvere i problemi di sito dipende dal fissare cotesti punti di riduzione. I quali alle volte sono indeterminati, perchè si possono prendere ad arbitrio nell'estensione di alcuni luoghi, come avviene ne' problemi locali: ed allora questi problemi non si possono risolvere altrimenti, senonchè esibendone que' tali luoghi. Alle volte poi sono determinati detti punti, perchè si prendono nelle intersezioni di que' diversi luoghi, ove rinvengonsi nello stesso tempo, attente le diverse condizioni, che debbono avere, come accade nei problemi non locali; ed allora la soluzione di questi pro-

blemi non si può d'altronde ottenere, se non che dall'esibire que' diversi luoghi, dalla intersezione de' quali restino essi punti convenevolmente determinati.

§. 16. Ora poste queste cose ben si vede quanto mai sia esteso l'uso de' luoghi in quasi tutt' i geometrici problemi, e specialmente in quelli di sito; ne' quali egli è sì richiesto, che senza di esso non si possono in verun modo risolvere, non solo i problemi locali, ma quelli ancora, che non sono locali. Che anzi nella classificazione di tali problemi rendesi ancora oltre modo necessario l'uso di cotesti luoghi. Infatti non si potrebbero i problemi distinguere in miglior guisa, e denominare altrimenti, senonchè distinguendoli, e donominandoli dai varj luoghi, che richieggonsi per la loro costruzione, come appunto con somma ragione si condussero per tal modo gli antichi Geometri, i quali, al riferir di Pappo (1), distinsero tre differenti generi di problemi dicendo, che altri di questi si debbano chiamare *piani*, altri *solidi*, ed altri *lineari*. « Que' problemi, eglino » dissero, che si possono costruire per mezzo » delle rette e delle circonferenze de' cerchi, giu- » stamente diconsi *piani*, perchè quelle linee, » per cui si risolvono tali problemi, hanno » l'origine loro nel piano. Quelli problemi poi »

(1) Coll. Mat. Lib. III. Scol. prop. IV.

» che si risolvono assumendo nella loro costruzione una, o più delle sezioni coniche si chiamano » *solidi* ; perchè l'è necessario servirsi nelle costruzioni delle superficie di figure solide, cioè » delle superficie coniche. Vi rimane il *terzo* » genere, che chiamasi lineare. Imperciocchè si » assumono nella costruzione altre linee, all'infuori delle già dette, le quali hanno una generasi varia, e trasmutabile, come sono l'Elici, » le Quadratrici, le Concoidi, e le Cissoidi, » che in vero hanno nella loro genesi molti, e » varj accidenti. »

§. 17. Intanto una tale distinzione de' problemi, come si rileva da un altro luogo di Pappo (1), pare che abbia avuto origine, da che i Geometri vetusti volendo dividere un dato angolo rettilineo in tre parti uguali, non poco vi esitarono, sì perchè un tal problema essendo di natura solido il voleano risolvere colla retta, e col cerchio, sì ancora, come nota espressamente Pappo, perchè non eransi ancora da essi conosciute le curve coniche. Ma appena conobbero queste curve, che tosto compresero la natura di quel problema, il quale non si può risolvere, com'essi il ricercavano da principio mediante quelle linee, che nascono dal piano, ma sì bene mediante quelle altre, che nascono dalle sezioni del cono, come in effetti con

(1) Coll. Mat. lib. IV. scol. prop. XXX.

tali linee il risolsero di poi egregiamente, ed in varie guise. Pare dunque, che da questo problema della trisezione dell'angolo i primi Geometri avessero incominciato a riconoscere que' problemi, che non si possono costruire colla retta, e col cerchio, ma che abbisognano delle sezioni coniche, e ciò dopo aver conosciute queste curve. In simil guisa possiamo dire, che gli antichi Geometri conosciute avendo altre linee differenti, abbiano quindi distinto quegli altri problemi, che non si possono mica costruire, nè colla retta, e col cerchio, nè tampoco colle Sezioni Coniche, ma sì bene con altre linee diverse dalle già dette: onde vennero essi per tal modo a stabilire saggiamente, e denominare que' tre differenti generi di problemi detti di sopra, secondochè i luoghi atti a costruirli siano *piani*, *solidi*, ovvero *lineari*. E sebbene i problemi *piani* risolvere si potessero mediante i luoghi solidi, ed anche mediante i luoghi lineari, pure que' savj Geometri stimarono essere non lieve colpa in Geometria il risolversi un problema da un genere improprio di luoghi. Nel che non poco mancarono lo stesso Archimede, ed il grande Apollonio, come nota Pappo Alessandrino; le cui parole nel luogo citato giova qui rapportare a disteso.

Antiqui Geometrae, ei dice, datum angulum rectilineum tripartito secare volentes ob hanc causam haesitarunt. Problematum, quae in

Geometria considerantur tria esse genera dicimus, et eorum alia quidem plana, alia solida, alia vero linearia appellari. Quae igitur per rectas lineas, et circuli circumferentiam solvi possunt, merito dicuntur plana; lineae nimirum, per quas talia problemata inveniuntur, in plano ortum habent. Quaecumque vero solvuntur, assumpta in constructionem aliqua conic sectione, vel etiam pluribus, solida appellata sunt, quoniam ad constructionem solidarum figurarum superficiibus videlicet conicis uti necessarium est. Relinquitur tertium genus problematum, quod lineare appellatur; lineae n. aliae praeter jam dictas in constructionem assumuntur, quae varium, et difficilem ortum habent, ex inordinatis superficiibus, et motibus implicatis factae. Ejusmodi vero sunt etiam lineae, quae in locis ad superficiem dictis inveniuntur, et aliae quaedam magis variae, et multae a Demetrio Alexandrino ταις γραμμικαῖς ἐπιστάσεται h. e. in linearibus aggressionibus, et a Philone Tyanaeo ex implicatione πλεκτουδων (1) et aliarum varii

(1) Le superficie, che noi diciamo a *lumaca*, sono quelle istesse, che da' Greci chiamavansi *πλεκτουδης* da *πλεκο* implico, e da *ιδουμ* assimilor per indicare appunto le varie pieghe, onde si avvolgono intorno a' loro assi a guisa di spirali. In effetti ciascuna di tali superficie vien generata da una retta orizzontale, che muovesi rasente due linee date di posizione, delle quali

generis superficierum inventae, quae multa, et admirabilia symptomata continent: et non-nullae ipsarum a junioribus dignae existimatae sunt, de quibus longus sermo haberetur. Una autem aliqua ex ipsis est, quae et admirabilis a Menelao appellatur.

Ex hoc genere sunt lineae helices, et quadrantes, et conchoides, et cissoïdes. Videtur autem quodammodo peccatum non parvum esse apud Geometras, cum problemâ plunum per conicâ, vel linearia ab aliquo invenitur, et, ut summam dicam, cum ex improprio solvitur genere, quale est in quinto libro conicorum Apollonii problema in parabola: et in libro de lineis spiraliibus Archimedis assumpta solida inclinatio in circulo. Fieri enim potest, ut nullo utentes solido problema ab ipso descriptum inveniamus. Dico autem circumferentiam circuli in prima circulatione

una è il di lei asse, ed è una retta verticale, e l'altra è una spira inclinata all'orizzonte. Definizione, che fortunatamente ritrassi dalla prop. 29. lib. IV. Coll. Mat. di Pappo', dove volendo egli dimostrare, che una retta parallela alla base di un cilindro retto giaccia in una superficie plettoidè ne assegna questa ragione, cioè, perchè ella si muove rasente l'asse di quel cilindro, ed una spirale data di posizione, dicendo a tal proposito: in $\pi\lambda\epsilon\kappa\tau\omicron\upsilon\delta\epsilon\iota$ igitur est superficiei LKI : fertur enim per rectam lineam BL , et per lineam spiralem positione datam. Su di che vedi la Geometria di sito del nostro Flauti.

descriptam demonstrare aequalem rectae lineae, quae a principio lineae spiralis ad rectos angulos ducitur ei, quae est circulationis principium, et a recta linea spiralem contingente terminatur. Itaque cum hujusmodi sit problematum differentia, antiqui Geometrae problema jam dictum in angulo, quod natura solidum est, per plana inquirentes invenire non potuerunt: nondum enim ipsis cognitae erant consectiones, et ob eam causam haesitarunt. Postea vero angulum tripartito dividerunt ex conicis... Pappo Coll. Mat. lib. IV. Scol. prop. 3o.

§. 18. Da tutto ciò, chi non iscorge quanto sia necessario l'uso de'luoghi, e quanto la cognizione loro siane conducevole a ben fissare la natura de' geometrici problemi, e ad agevolarne per tal modo l'analisi? Certamente se il problema della trisezione dell'angolo arrestò lungo tempo i Geometri dell'antichità remota, ciò appunto avvenne, come nota Pappo Alessandrino, perchè non aveano ancora essi conosciute le curve coniche; vale a dire non aveano ancora la cognizione di que'luoghi, che si richieggono per la risoluzione di detto problema. E quì mi cade in acconcio il riflettere che la conoscenza di tali luoghi sì necessaria a quegli antichi Geometri per trisecare l'angolo, non dovea riguardare la natura, e le proprietà solamente di essi luoghi, ma benanche il modo, onde poterli dalle loro proprietà date rinvenire: locchè nell'analisi è massimamente richiesto. Con-

ciesiachè per la risoluzione de' problemi , come dianzi si è osservato , non solo vi si debbono convenevolmente rilevare da' dati , e da' quesiti , quali sieno i loro punti di riduzione , e quali condizioni locali questi debbano avere ; ma quel ch'è più , bisogna esibire ancora i luoghi de' detti punti , i quali non si potendo d'altronde rilevare , senonchè dalle proprietà loro espresse da quelle condizioni locali , ben si vede che per riuscire in questo analitico sviluppo uopo è , che non solo sappiasi la natura , e le proprietà de' luoghi , onde si risolvono i problemi , ma uopo è principalmente , che sappiasi ancora il modo di esibire i detti luoghi dalle loro proprietà date . La qual cosa ben si comprese da que' Geometri , che scrissero del luogo risoluto , in cui sembra , che tutte le loro cure rivolte avessero principalmente in istabilire appunto ampie teorie di cotesti luoghi . Ed in vero Pappo Alessandrino chiara testimonianza ne arreca nel principio del settimo libro delle sue Matematiche collezioni , ove numerando egli le varie opere attinenti al luogo risoluto vi rapporta ancora quelle , che intorno ad essi luoghi scritto ne avevano i sommi Geometri Aristeo Seniore , Euclide , Apollonio Pergeo , ed Eratostene . Così noi sappiamo , che il grande Apollonio si occupò di proposito a trattare de' luoghi piani in due libri , di cui fortunatamente ne rimangono presso lo stesso Pappo le indicazioni degli argomenti . onde poterono restituirli facilmente gli illustri Geometri Francesco

Schooten, e Pietro Fermat; dei quali il primo vi adoperò la sintesi, frammischiandovi in pochi di essi anche l'analisi de' moderni; ed il secondo vi recò la sola sintesi alla maniera degli Antichi, serbando però ad altri l'utile lavoro di recarvi ancora l'analisi, e di percorrerne scrupolosamente tutt' i casi, e tutte le determinazioni, come di poi lo eseguì lodevolmente l'accuratissimo Roberto Simpson. In simil guisa sappiamo da Pappo, che il nostro Aristeo Seniore, vetustissimo Geometra Crotoniate, composti avendo brevi, e nitidi elementi sulle curve coniche in cinque libri, altri cinque ancora ne aggiunse *sui luoghi solidi*, che ci chiamò *coerenti a' conici*, e per tal ragione vengono essi numerati da Pappo dopo gli otto libri de' conici di Apollonio. Ma quest'opera di Aristeo sui luoghi solidi, come ancora quelle altre numerate in seguito da Pappo, voglio dire i due libri di Euclide *sui luoghi alle superficie*, ed i due libri di Eratostene, intitolati *alle medie proporzionali*, non ebbero mica la stessa sorte de' luoghi piani. Imperciocchè di esse ne rimane appena il solo nome presso Pappo Alessandrino, il quale nel citato suo libro esponendo gli argomenti delle opere riguardo al luogo risoluto, ne perviene agli otto libri de' conici, e non più s' inoltra in quelle, che riguardano gli altri luoghi, che sgraziatamente non essendo a noi giunte per colpa de' tempi, ci lasciano ora un grandissimo vuoto nella parte

appunto la più sublime, ed insieme la più utile della Geometria degli Antichi. Ma quel che più ne duole si è, ch' egli non è sì facile il restituire coteste opere, perchè a ciò fare ne mancano le indicazioni sufficienti: pur tuttavolta dalle cose finora stabilite ben si rileva, che in esse altro fine non si avean potuto proporre gli Antichi, se non che quello di renderne facile, e spedito l'uso de' luoghi, il quale già s'è veduto quanto esteso ei sia, ed oltre modo necessario nella risoluzione non meno, che nella classificazione de' problemi: ma il divinare poi i mezzi, ed i modi certamente ammirabili, ch' eransi mai escogitati, e messi in opera da que' sommi Geometri per giungere a sì nobil fine, ecco il gran nodo Gordiano, che dovrò andare sviluppando giusta mia possa nel capitolo, che siegue, ove mi resta finalmente a dover favellare de' varj ordini di cotesti luoghi.

CAPITOLO III.

De' varj ordini de' luoghi.

§. 19. Nel capitolo precedente si è detto, che per la risoluzione de' Geometrici problemi si debbono determinare i luoghi de' loro punti di riduzione, e ciò mediante quelle condizioni locali, che vi si traggono dalla natura stessa de' problemi sviluppandone convenevolmente i dati, ed i quesiti. Or a fin di agevolare questo analitico

sviluppo ne soggiungo , che sebbene al variare de' dati , e de' quesiti de' problemi possano variare all' infinito le condizioni locali de' loro punti di riduzione ; pure se mai queste si riducano a certi generali rapporti tra quelle rette , che da essi punti conducansi *in paratesi*, cioè , *che facciano angoli dati rispettivamente con altrettante rette date di sito* , giusta la definizione 11. de' dati di Euclide , ovvero , che sieno esse inclinate a dati punti , o che formino tra loro angoli dati , ovvero in altre guise ; sarà chiaro , che secondo la varietà di cotali rette , e secondo i varj rapporti tra loro , ne dovranno emergere varj ordini di luoghi ; a cui si dovranno mirabilmente ridurre i problemi , siccome le specie riduconsi a' loro generi. Di che per darne un esempio in quest' opera suppongasì , che dal punto di riduzione sien tirate solamente quante rette si vogliano in paratesi sopra altrettante rette date di sito, e che sia data la ragion composta di ciascuna a ciascuna di quelle rette tirate , essendo queste in numero pari , e della rimanente ad un' altra data , ovvero ad un' istessa delle rette tirate, essendo elle in numero impari ; sarà manifesto , che il luogo di detto punto dovrà variare , secondochè variano la data ragione , il numero delle date rette , ed il sito , che hanno tra loro. Imperciocchè se da un punto sia condotta una sola retta in paratesi , che abbia una ragion data ad una retta data di grandezza , s' intenderà di leggieri essere il luo-

go del punto una retta data di sito; e sarà parimente una retta data di sito, allorchè da esso punto sien tirate rispettivamente due rette in paratesi sopra due date rette di sito, e che sieno tra loro in data ragione, come l' ha dimostrato Apollonio (1). Ma se poi da un punto sieno tirate tre rette in paratesi sopra tre date rette di sito rispettivamente, e suppongasi, che sia data la ragion composta della prima alla seconda di esse rette in paratesi, e della terza all' istessa seconda, ovvero ad una retta data di grandezza, in entrambi questi casi, come dimostrerò appresso, il punto ne toccherà una delle sezioni coniche. Similmente dimostrerò essere ancora il luogo del punto una delle sezioni coniche, se mai da esso sieno tirate in paratesi quattro rette rispettivamente sopra altrettante date di sito, e per modo, che sia data la ragion composta della prima alla seconda di quelle rette in paratesi, e della terza alla quarta. E così ragionando in seguito, questo punto ne toccherà più linee, secondochè nel detto modo a più rette date di sito ei si rapporta. Lo che ben s' intende, e per la varietà maggiore, che n' emerge nel sito delle date rette tra loro, e per lo maggior numero delle ragioni, che ne compongono la ragion data.

(1) Vedi i *Luoghi piani* restituiti da Simpson Prop. XXIII. lib. 1.

§. 20. Intanto cotesti differenti luoghi potremmo commodamente indicarli dalle date linee, dicendo per brevità *luogo ad una linea*, *a due*, *a tre*, *ovvero a quattro linee*, secondochè nel modo, che abbiamo detto di sopra, il punto in quistione si rapporti ad una, a due, a tre, ovvero a quattro rette date di sito; e così appresso. Lo che è conforme al linguaggio degli antichi Geometri, come rileviamo per avventura dal grande Apollonio nella lettera ad Eudemò, in cui descrivendo egli a questo Geometra i nuovi teoremi contenuti nel terzo libro de' suoi Conici, e magnificandoli oltre modo per l'utile, ch'essi arrecano alle composizioni, ed alle determinazioni de' luoghi solidi, vi nota espressamente la necessità loro per la composizione del luogo, ch'ei dice, *a tre*, *ed a quattro linee*. E tanto ivi si estolle, che non ha ritegno di scagliarsi contro lo stesso Euclide, perchè questi non diede l'adequata maniera di comporre il detto luogo; ma soltanto una picciola parte, e questa non troppo felicemente. In fatti ecco, come lo stesso Apollonio si esprime nella citata lettera: *Tertius liber continet multa, et admirabilia theoremata, quae utilia eruat et ad solidorum locorum compositiones, et ad determinationes, quorum complura et pulcherrima, et nova sunt. Haec nos perpendentes animadvertimus non positam esse ab Euclide rationem componendi loci ad tres, et quatuor*

lineas , verum ipsius tantummodo particulam quamdam , atque hanc non satis feliciter : non enim fieri poterat , ut ea compositio recte perficeretur absque iis , quae a nobis inventa sunt.

Le quali parole comentando Pappo Alessandrino nell' articolo de' Conici nella prefazione al settimo libro de le sue Collezioni Matematiche , e volendo difendere il mitissimo Euclide da quegli'ingiusti rimproveri di Apollonio, sì ne soggiunge: *Quem autem dicit in tertio libro locum ad tres , et quatuor lineas ab Euclide perfectum non esse , neque ipse perficere poterat , neque aliquis alius : sed neque paululum quid addere iis , quae Euclides scripsit per ea tantum conica , quae usque ad Euclidis tempora praemonstrata sunt , ut etiam ipse testatur dicens , fieri non posse ut locus perficeretur absque iis , quae ipse scribere coactus sit. Euclides autem secutus Aristaeon scriptorem luculentum in iis , quae de conicis tradiderat : neque antevertens , neque volens eorum tractationem destruere , cum mitissimus esset , et benignus erga omnes , praesertim eos , qui mathematicas disciplinas aliqua ex parte augere , et amplificare possent , ut par est , et nullo modo infensus , sed accuratus , non arrogans , velut hic , quantum ostendi potuit de loco per ejus conica memoriae prodidit : non addens perfectum illud , absolutumque esse ; tunc enim necessario reprehendi posset : nunc vero laudquaquam illud faciendum*

est; siquidem et ipse in conicis pleraque imperfecta relinquens non satis ea valet tueri. Adjicere autem loco, quae deerant, facile potuit, animo comprehendens ea, quae ab Euclide de loco scripta fuerant, et dans operam Euclides discipulis Alexandriae longo tempore, ex quo adeo excellentem in mathematicis habitum est assecutus, neque usquam deceptus est. At locus ad tres, et quatuor lineas, in quo magnifice se jactat, et ostentat nulla habita gratia ei, qui prius scripserat, est hujusmodi. E qui prima di passare oltre, è di bene notare con quanta chiarezza faccias' intendere da Pappo non meno, che dallo stesso Apollonio averne questi realmente risoluto il luogo a tre, ed a quattro linee, come già si tiene per certo da' Geometri di nostra scuola, (1) che che ne abbian detto in contrario il Cartesio, ed il Newton. Intanto sentiamo da Pappo enunciare non solo questo sì famoso luogo a tre, ed a quattro linee, ma quegli altri eziandio, che abbiamo indicato di sopra, mentre egli fortunatamente si ne prosiegue a dire. *Si positione datis tribus rectis lineis ab uno, et eodem puncto ad tres lineas in datis angulis rectae lineae ducantur, et data*

(1) Vedi il trattato Analitico de' luoghi Geometrici del Sig. Fergola pag. 3., e la prefazione alle sezioni coniche illustrate dall' Ab. Giannattasio pag. 18: III. edizione.

sit proportio rectanguli contenti duabus ductis ad quadratum reliquae : punctum contingit positione datum solidum locum , hoc est, unam ex tribus conicis sectionibus. Et si ad quatuor rectas lineas positione datas in datis angulis lineae ducantur ; et rectanguli duabus ductis contenti ad contentum duabus reliquis proportio data sit : similiter punctum datam coni sectionem positione continget. Siquidem igitur ad duas tantum locus planus ostensus est. Quod si ad plures , quam quatuor punctum continget locos non adhuc cognitos , sed lineas tantum dictas ; quales autem sint , vel quam habeant proprietatem , non constat : earum unam , neque primam , et quae manifestissima videtur , composuerunt ostendentes utilem esse : propositiones autem ipsarum hae sunt. Si ab aliquo puncto ad positione datas rectas lineas quinque ducantur rectae lineae in datis angulis , et data sit proportio solidi porallelepipedum rectanguli , quod tribus ductis lineis continetur ad solidum parallelepipedum rectangulum , quod continetur reliquis duabus , et data quapiam linea , punctum positione datam lineam continget. Si autem ad sex , et sit data proportio solidi tribus lineis contenti ad solidum , quod tribus reliquis continetur ; rursus punctum continget positione datam lineam. Quod si ad plures quam sex , non adhuc habent dicere , data sit propor-

tio cujuspiam contenti quatuor lineis ad id quod reliquis continetur : quoniam non est aliquid contentum pluribus quam tribus dimensionibus. Acquiescunt autem his, qui paulo ante talia interpretati sunt : neque unum aliquo pacto comprehensibile significantes quod his continetur, licebit autem per conjunctas proportionales haec et dicere, et demonstrare univ[er]se in dictis proportionibus, atque his in hunc modum. Si ab aliquo puncto ad positione datas rectas lineas ducantur rectae lineae in datis angulis, et data sit proportio conjuncta ex ea, quam habet una ductarum ad unam, et altera ad alteram, et alia ad aliam, et reliqua ad datam lineam, si sint septem ; si vero octo, et reliqua ad reliquam : punctum continget positione datas lineas : et similiter quotcumque sint impares vel pares multitudine, cum haec, ut dixi, loco ad quatuor lineas respondeant.

§. 21. Ecco per tanto come queste innumerevoli specie di linee, che dovrà toccare cotesto punto, si restringono tutte in que' generi di luoghi, che abbiamo indicati di sopra, denominandone ciascuno dal numero impari, e dal numero pari delle date rette di sito, o vogliamo dire *direttrici*. Ma quel che è più da notarsi, si è, che secondo un tale ordine di luoghi restano mirabilmente distribuite, e graduate tutte le anzidette specie di linee, ed anche generalmente de-

nominate. Dappoichè sebbene in moltissima parte sieno elle innominate, pure dandole quella denominazione degli infimi generi di luoghi, cui si appartengono, si verranno a distinguere da tutte le altre per modo, che quel loro nome generico non potrà comprendere, se non che un determinato numero di esse. Infatti *il luogo ad una, ed a due linee* non può comprendere che la sola retta, *il luogo a tre, ed a quattro linee* non può contenere, che la retta, il cerchio, la parabola, l'ellisse, e l'iperbole. Similmente il luogo *a cinque, ed a sei linee* e oltre delle anzidette ne racchiude ancora delle altre, che si potrebbero determinare, percorrendo i casi particolari, che mai occorrono nel sito delle date direttrici, e della ragion data delle rette in paratesi: lo che intendasi benanche degli altri luoghi convenevolmente. E quì ancora bisogna massimamente riflettere, che se mai la ragion data, che si compone da quelle delle rette in paratesi, e che forma la caratteristica di ciascuno di cotesti luoghi, vogliasi tradurre alla maniera de' Moderni in una equazione algebrica, riducendone l'espressioni simboliche delle rette in paratesi a due qualunque di esse, che diconsi le *Coordinate* di un tal luogo, sarà il grado di quest'equazione uguale, com'è chiaro, al numero di quelle ragioni componenti, cioè alla metà del numero pari delle date direttrici. E perciò da questo numero potremo ancora denominare gli ordini de'

detti luoghi, dicendo *linee di primo*, e di *secondo ordine* quelle, che secondo gli Antichi si direbbero essere rispettivamente del luogo *ad una ed a due linee*, *del luogo a tre*, *ed a quattro linee*; e così appresso. Intanto i moderni Analisti anch'essi sono usi a dividere le linee in varj ordini, diffinendone ciascuno dal grado dell'equazione, che n' esprime il rapporto tra le di lui coordinate, senza però mai additarne da qual proprietà di esso il detto rapporto ne discenda. La qual maniera di diffinire, chi non vede quanto sia indeterminata, e vaga, non esprimendovisi affatto le proprietà del definito? Al contrario le definizioni di cotesti generi di luoghi, datene dagli Antichi, non possono essere certamente nè più semplici, nè più precise; che anzi lo stesso nome n'è sì proprio, che con una brevità mirabile n' esprime finanche la proprietà del soggetto.

§. 22. Del rimanente, l'impegno degli antichi Geometri nello stabilire cotest'ordine di luoghi non era tanto il classificare le linee mediante i dati rapporti delle loro rette in paratesi, quanto per questo mezzo il ridurre a semplici termini la risoluzione de' problemi. La quale sebbene i moderni Analisti abbiano anch'essi procurato semplificare mercè la costruzione Geometrica delle equazioni algebriche, ch'essi da' problemi traggono convenevolmente; pure questo loro metodo, se mal non mi appongo, è di gran lunga inferiore a quello degli Antichi. Imperciocchè in

esso non basta il tradurre i problemi in equazioni; ma fa d'uopo in oltre maneggiare quest'equazioni medesime, a fin di costruirle geometricamente. Lo che in ciascun problema ne impegna a tante molteplici operazioni, che il più delle volte riescono gravi oltre modo, e quasi da non potersi eseguire, come pur troppo il sanno coloro, che dalla Geometria ne ricorrono all'Algebra, e poscia da questa in quella ne ripiegano.

Non così però nel metodo degli Antichi, ove senza cotesti andirivieni, basta che i dati rapporti delle rette in paratesi vi si rilevino in convenevol modo dalla natura de' proposti problemi, perchè questi poi ne restino egregiamente risolti, ed adeguatamente senza più fare. Dappoichè i detti rapporti non si debbono tradurre in equazioni, come nel metodo de' Moderni, ma soltanto si richiede, che trovinsi quelli già composti nel luogo risoluto, affinchè per tal modo immantinente, e senza ulteriore sviluppo si possano ad essi ridurre, come a' loro generi, non solo i proposti problemi, ma infiniti altri, se occorre, della stessa specie. La qual cosa ognun vede, quanto render ne debba un tal metodo superiore a quello de' Moderni, in cui l'analisi de' problemi non si arresta ne' dati rapporti delle rette in paratesi, ma vi si deve anzi continuare a grande stento. Dappoichè i Moderni a differenza degli Antichi hanno bisogno di sviluppare ulteriormente i detti rapporti; per cui non solo vengono a gravar l'analisi di tant'inutili passag-

gi riducendo i problemi in equazioni, ma quel ch'è più, ne prolungano il cammino all'infinito. Conciossiachè debbono essi in ciascun genere di problemi costruire particolarmente tutte le innumerevoli equazioni, che mai ne emergono, e che ad una generale equazione non possono rapportarsi senza prima praticarvi la debita sostituzione delle grandezze; il che importa ne' particolari problemi doverne fare mai sempre nuove costruzioni. Al contrario questi sì lunghi giri di analisi evitavansi egregiamente dagli Antichi per virtù di que' generi di luoghi, che a ragione cercavano essi con tanto studio, e di cui certamente nulla può escogitarsi di più utile, e di più grande in tutta la Geometria.

§. 23. Ed in vero per rendere ciò manifesto coi fatti, ho impreso nel decorso di questa opera a mostrare un solo genere di essi luoghi, quello cioè a tre, ed a quattro linee, detto volgarmente il problema *delle quattro rette*, d'onde presi le prime tracce di cotesto preclarissimo metodo degli Antichi. Dappoichè non senza gravi fatiche mi avvidi dovermi a quel luogo ridurre i problemi piani non meno, che i problemi solidi, affm di evitare per tal modo que' lunghi, e tortuosi giri di analisi, che pur troppo inviluppano il metodo geometrico-algebrico, che seguono i Moderni dietro le orme dell' Illustre Renato delle Carte. Il quale se per poco avvertito ne avesse una sì maravigliosa riduzione, che de' problemi intendeano di fare

gli Antichi, mercè quelle di loro sublimissime ricerche de' luoghi alle linee, certamente ei non avrebbe volentieri smarrite queste analitiche vie sì nobili, e preclare, segnate a noi da que' Geometri vetusti: e scorgendo quanto per esse ne divien breve il cammino dell'analisi, certamente dico, non sarebbene ei trasandato cotanto nell'algebra, mendicando soluzione a' Problemi di Geometria, come se questa scienza mancasse di metodi proprj, e l'Algebra stessa da lei non prendesse forza; e vigore? Ma sgraziatamente questo grande Analista travedendo il più bello, ed il più sublime della Geometria degli Antichi ne imprese a risolvere que' luoghi alle linee, come tante quistioni particolari, e di puro esercizio: e perchè prevenuto de' grandi progressi fattisi nell'Algebra per opera principalmente de' nostri Italiani, che fin dal suo nascere tra noi un saggio uso ne fecero in Geometria, perciò di appigliarsi a quella fè animo il valentuomo, lusingandosi per suo mezzo poter passare al di là degli Antichi (1). Infatti ei se 'l credè assai di buon grado, non solo allorchè accintosi al grand'uopo gli riuscì per le algebriche vie ridurre in equazioni que' problemi, che riguardavansi da lui, come refrattarj a tutta l'Antichità rimota;

(1) Vedi la Geometria del Cartesio pag. 2. Edizione di Amsterdam anno 1659.

ma molto più ancora, allorchè costruendo dette equazioni giunse ad esibire i desiati luoghi per assegnazione de' punti. Poichè sebbene in questo modo la questione non restasse mica risolta, non essendo i punti, che si debbono assegnare, ma bensì i loro luoghi, i quali non si possono certamente esibire senza prima conoscerne la genesi, non meno che le proprietà caratteristiche; pure il Cartesio abbagliato dal suo metodo credè per quella semplice assegnazione de' punti avere a pieno soddisfatto i voti degli Antichi (1), che anzi parendogli allora aver quasi superate tutte le difficoltà della Geometria, non dubitò di stabilire qual canone generale non esservi problemi, che in simil guisa trattati coll'Algebra non si possano eziandio ridurre alla costruzione delle loro equazioni. Così questo genio de' moderni Analisti rendendo più universale l'uso dell'Algebra nella risoluzione de' problemi, venne a fronte della Geometria de' Greci ad inalzarne un'altra quasi del tutto nuova, e sotto mentite forme; lusingandosi esser questa tanto di quella più energica, ed attiva, quanto ch'egli col suo metodo lusingavasi aver cominciato dove aveano terminato gli Antichi. Al che fecero eco tutt' i Geometri, e quelli specialmente di sua Nazione, prevenendo talmente gli animi a favor di lui, che non si pensò ad altro, che a coltivare il suo novello

(1) Vedi la di lui opera testè citata pag. 12.

metodo, non senza grave scapito della vera, ed ingenua Geometria.

§. 24. Intanto ben si vede dalle cose antecedenti, con quanta poca ragione fu detto dal Fontenelle (1) aver cominciato il Cartesio col suo metodo dove aveano terminato gli Antichi; purchè questo però non vogliasi intendere della difficoltà dell'analisi, perchè allora non è che pur troppo vero, ch'essa comincia per l'appunto nel metodo del Cartesio, dove ne termina in quello degli Antichi. Conciossiachè ei senza avvedersene s'introdusse in uno sterminato laberinto, impegnandosi col suo metodo, non solo nella riduzione de' problemi in equazioni, che certamente non l'è di piccolo momento, ma quel ch'è più ancora, obbligandosi alla costruzione di quest'equazioni medesime, la quale non può dirsi abbastanza quanto il più delle volte riescane intralciata, e quasi da non potersi eseguire, sì per la varietà delle operazioni Algebriche da istituirsi sull'equazioni proposte, affin di prepararle in tal modo alla costruzione, e sì ancora per la molteplicità delle operazioni Geometriche da praticarsi sull'equazioni già preparate, affin di costruirle effettivamente. Così per parlare soltanto dell'equazioni indeterminate di secondo grado, che servono, come l'è noto, alla

(2) Vedi la di lui prefazione all'analisi degli infinitamente piccoli del Marchese dell'Hopital pag. 300. Tomo VI. delle sue opere pubblicate in Napoli l'anno 1765.

risoluzione de' problemi solidi, Cartesio prima di costruire l'equazione proposta, la dovè risolvere per rispetto di una delle due Coordinate, ch'essa ne racchiude, cioè a dire, dovè ritrovare il valore d'una di queste due Coordinate, e poi adeguando rispettivamente a due nuove variabili la parte razionale, e la parte irrazionale di un tal valore, prima ch'ei da questa ne rilevasse il parametro, ed il diametro della curva da descriversi, fu costretto a mettere in opera il metodo de' Coefficienti indeterminati. Cosa in vero assai dura, che mosse il Signor Giovanni Witt acutissimo Geometra Olandese ad escogitare un altro metodo, cioè quello di stabilire primieramente l'equazioni a tutte le curve coniche nella loro forma più semplice, e poscia di rapportare ad esse l'equazioni da costruirsi mediante opportune sostituzioni di grandezze. Similmente parmi essersi condotto Gregio, ed il Marchese dell'Hopital, in quanto che anche essi stabilirono dell'equazioni regolatrici, cui rapportare l'equazioni proposte, sebbene non già nella più semplice, ma bensì nella più complicata forma, che possano mai competere a tutte le curve coniche; nondimeno questi metodi indiretti, e particolari non piacquero all'ingegnossissimo Giacomo Ermano, per cui ei si rivolse piuttosto al metodo Cartesiano, che n'è insieme diretto, ed universale. E per evitare il metodo de' coefficienti indeterminati pensò il valentuomo di adeguare a zero la parte irrazionale di quel valore

ottenutosi dal Cartesio, e ciò, com'ei dice, affin di ritrovare in tal maniera le vestigia de' vertici della Curva da descriversi. Ma in quest' equazione l'Ermanno urta sovente nelle quantità immaginarie, adoperando per un possibil fine un impossibil mezzo. E sebbene per togliere questo grandissimo sconcio dal metodo Ermanniano molti ingegnosì modi adoperati vi avesse il celebre Gesuita Vincenzio Riccati, pure questi non potè fare a meno in moltissimi casi di non ripiegare nel metodo dell' Hospital, come rislett' egregiamente su tal proposito il nostro chiarissimo Signor Fergola. Il quale nel suo insigne trattato de' luoghi Geometrici, mentre vi espone con pari giudizio, che chiarezza tutti cotesti metodi, ve ne reca ancora un'altro di sua invenzione, ove per verità l'Algebra gareggia con la Geometria. Dappoichè volendo egli preparare l' equazione in forma costruibile non vi adopera, che de' mezzi assai elementari, quali sono quelli di ordinarla, e di compiervi nel primo, e nel secondo membro i quadrati delle parti variabili, che vi si ritrovano; perchè poi tosto vi ravvisi i determinanti della curva da descriversi. Vale a dire ei non vi risolve l' equazione, come dee fare il Cartesio, ma soltanto vi aggiunge pochi termini per l'indicato compimento de' quadrati, che in vero l'è quanto di più grande poteasi mai ottenere in questo genere dall' analisi de' Moderni. Nondimeno il metodo Cartesiano tuttochè siesi agevolato in sì diverse guise da tanti

sommi Analisti, pure di quanti algebrici artifici non abbisogna per preparare soltanto l'equazione ad esservi geometricamente costruita ! Che dovrà poi dirsi della costruzione istessa ? Quante operazioni geometriche non si dovranno allora praticare per costruirvi l'espressioni Algebriche de' determinanti della Curva da descriversi ? E quante altre non ve n'emergeranno di poi, se mai vogliasi com'è debito, alle costruzioni Geometriche de' problemi soggiungere le dimostrazioni non già in espressioni simboliche, ma bensì esplicite, e reali per farne in tal modo un tutto simmetrico, ed uniforme ? Certamente non sarà piccolo involuppo il dover tradurre in geometrico linguaggio tutti quegli artifizii algebrici, che per avventura si saranno messi in opera nella soluzione de' problemi, specialmente un po' complicati, come bene il possono saggiare coloro, che sono usi a ricorrere dalla geometria all'algebra, e poscia da questa ripiegarne in quella. Essi pur troppo conoscono per esperienza quanto sia laborioso il passare dall' un metodo all' altro, e quante sien poi monstuose quelle soluzioni de' problemi, che si ottengono in cotal guisa. Basta dire, che alcuni Geometri moderni giungono finanche a trascurare interamente la costruzione geometrica, sol paghi di essere pervenuti ad un'equazione qualunque de' loro problemi: tanto ad essi è difficile, e molesto il costruire l'equazioni. Ma lasciando da banda tutte queste cose, dico solamente, che qualunque sia

il metodo generale, che si adotti per costruire l'equazioni indeterminate di secondo grado, esso non potrà mai valere per tutt'i particolari problemi solidi, se mai le rispettive equazioni di questi a quelle non si rapportino mediante la sostituzione delle grandezze, vale a dire, se a tutte queste particolari equazioni non si adatti mai sempre quel metodo generale. Or questo appunto rende oltremodo incomodo, e prolisso il metodo del Cartesio, come quello, che in qualunque maniera vi si costruiscano l'equazioni, obbliga sempre a nuove operazioni in tutti gli innumerabili problemi solidi, che mai occorrono. E lo stesso intendasi avvenire ancora ne' problemi lineari. Al contrario, chi il crederebbe? Dove incominciano tutte coteste difficoltà nel metodo del Cartesio, là per l'appunto trovansi già terminate in quello degli Antichi. Poichè ivi, come di anzi si è detto, basta l'essersi pervenuto nell'Analisi de' problemi ad un dato rapporto delle rette *in paratesi*, perchè questo per avventura non dee neppure tradursi in equazione, o maneggiarsi altrimenti (come avviene pur troppo nel metodo de' Moderni) ma allora tutta la difficoltà dell'analisi s'è ridotta mirabilmente alla composizione de' luoghi alle linee, la quale perciò rende infinitamente pregevole, ed attivo questo metodo degli Antichi, e fa che non le si possa in verun modo paragonare quello de' Moderni.

§. 25. Ecco il perchè doveasi con molto im-

pegno da que' vetusti Geometri cercare detta composizione nel luogo risoluto , come quella , che sommanente ne agevola la risoluzione de' problemi. Ed in vero volendo parlare della sola composizione del luogo a tre , ed a quattro linee , che l' analisi de' problemi solidi sì mirabilmente ne abbrevia , risparmiandosi per suo mezzo tutta l' orditura del metodo algebrico de' Moderni , con quante cure in effetti non fu essa richiesta da' più sublimi Geometri dell' Antichità rimota ? Basta il rammentare , che Apollonio Pergeo ardì scagliarsi contro lo stesso Euclide per non aver composto di un tal luogo , che picciola parte , e questa non troppo felicemente , per cui egli a tutto potere si mosse ad inventare nuovi teoremi nel terzo libro de' suoi Conici , chiamandoli a ragione *ammirabili* , e *preclari oltremodo*: appunto , perchè senza di essi non poteasi rettamente comporre quel luogo a tre , ed a quattro linee , il quale non può dirsi abbastanza quanto mai rendane agevole il cammino dell' analisi. E però cotesto libro di Apollonio , in cui si contengono i principj della composizione di quel luogo sì preclaro , fu giustamente tenuto in sommo pregio dagli antichi Geometri. I quali , al riferir di Eutocio (1), lo stimarono degno , che molto studio ,

(1) Vedi la lettera , ch' egli scrive al suo amico Antemio nel principio de' *Commentarj* al terzo libro de' Conici di Apollonio.

e diligenza vi s'impiegasse: e ciò, possiam dire collo stesso Apollonio, per l'utile, che da un tal libro ridonda alla composizione de' luoghi solidi, e di quella specialmente del luogo a tre, ed a quattro linee. Se non che a reprimere per poco l'arroganza d'Apollonio, il quale in detto luogo sì magnificamente si estolle sul mitissimo Euclide, aggiungo, ch'egli per compimento dell'opera avrebbe dovuto sulle tracce di lui mostrare altri luoghi analoghi a quell' indicati da Pappo, affinchè i problemi solidi ne restassero per tal modo ridotti in tutt' i casi senza mica bisogno di ricorrersi all'algebra per la costruzione delle loro equazioni. E sebbene Euclide non abbia tanto progredito nella composizione del luogo a tre ed a quattro linee, pure l'aver escogitato un luogo sì proprio per la riduzione de' problemi solidi e quindi l'aver egli aperto a' Geometri un vastissimo campo da stabilire similmente gli altri ordini de' luoghi per la risoluzione generale de' problemi, qual gloria per questo non gliene dovrà ridondare? Basta dire, che una sì ammirabile riduzione de' problemi, che in certo modo ne circoscrive l'infinito, e che ne costituisce senza alcun dubbio il termine più glorioso della Geometria degli Antichi, non ad altri è dovuta, che alla sopraumana sagacia dello Stichiote.

§. 26. Intanto è da dolersi, che un argomento di sì gran rilievo, e che formava nel luogo risoluto l'oggetto delle più intense cure degli An-

tichi Geometri, non siasi ravvisato da' Moderni, forse perchè abbagliati dalla Geometria del Cartesio anch' essi al pari di lui ne appresero i luoghi alle linee, come tanti problemi particolari, e di puro esercizio, non iscorgendo il loro mirabile uso nella riduzione de' problemi. Che anzi nè tampoco il vide lo stesso Cavalier Newton, a cui per altro facea molta ombra qualche ramo della Geometria Cartesiana. Imperciocchè sebbene ancor egli si fosse non poco occupato del problema delle quattro rette, pure non si avvisò per nulla della maravigliosa riduzione de' problemi solidi, che mercè di quel luogo a tre, ed a quattro linee intendeano di fare gli Antichi. Infatti volendo il valentuomo nella sua Aritmetica universale ridurre i problemi di terzo, e quarto grado in una maniera ben differente di quella del Cartesio, lasciò la via regia segnatane da que' vetusti Geometri, e da lui medesimo ancora calcata, per seguirne un'altra assai strana, ed impropria, qual si fu quella di costruire l'equazioni cubiche, e biquadratiche, derivandole dal particolarissimo problema di *applicare una retta data di grandezza tra i lati di un dato angolo, e che passi per un punto dato*. Tanto può talvolta il pregiudizio, e la prevenzione anche negli uomini più grandi! Ma di queste cose ho detto abbastanza.



DIVINAZIONE

SULLA

GEOMETRIA ANALITICA

DEGLI ANTICHI

PARTE SECONDA.

*Principii dell' esposto metodo analitico
degli Antichi riguardo alla risoluzione
de' problemi solidi.*

LEMMA AL PORISMA SEGUENTE.

SIENO date di sito le rette AB (*fig. 1.*) CD, ed EF, a cui dal punto G sieno condotte in paratesi ovvero in dati angoli le GA, GC, e GF rispettivamente, e per modo, che il rettangolo di due di queste rette, poniamo delle due GA, e GC, stiane al rettangolo della rimanente GF, e della data, retta H nella ragione delle date rette I, e K;

indi dallo stesso punto G si tirino GL , GM , e GN rispettivamente sulle AB , CD , ed EF , che formino con queste anche angoli dati. Dico, che sarà pure il rettangolo LGM al rettangolo HGN in una data ragione: e vice versa, se in questa data ragione stia il rettangolo LGM al rettangolo HGN , dico, che tirate le rette in paratesi GA , GC , e GF , sarà benanche il rettangolo AGC al rettangolo HGF nella ragione di I a K .

Imperciocchè essendo dati per ipotesi gli angoli GLA , e GAL del triangolo GAL sarà data la ragione di GL a GA . Similmente essendo dati gli angoli GMC , e GCM del triangolo GCM , sarà data ancora la ragione di GM a GC ; e perciò sarà data la ragione del rettangolo LGM al rettangolo AGC , che pongasi uguale a quella delle date rette O , ed I . Ma il rettangolo AGC sta per ipotesi al rettangolo HGF , come I a K . Dunque sarà per equalità ordinata il rettangolo LGM al rettangolo HGF , come O a K . Ma per essere dati gli angoli del triangolo GNF è data ancora la ragione di GF a GN , ovvero del rettangolo HGF al rettangolo HGN , che pongasi uguale a quella delle date rette K , e P . Dunque sarà di nuovo per equalità ordinata il rettangolo LGM al rettangolo HGN , come O a P . Vice versa sia il rettangolo LGM al rettangolo HGN nella data ragione di O a P ; dico essere ancora il rettangolo AGC al rettangolo HGF , come I a K .

Imperciocchè essendo per costruzione il rettan-

golo LGM al rettangolo AGC, come O ad I, sarà invertendo il rettangolo AGC al rettangolo LGM, come I ad O. Ma il rettangolo LGM sta per ipotesi al rettangolo HGN, come O a P, ed il rettangolo HGN per costruzione sta al rettangolo HGF, come I a K. Dunque per equalità ordinata sarà il rettangolo AGC al rettangolo HGF, come I a K. C. B. D.

PORISMA I.

Date di sito tre linee rette ritrovare un punto, dal quale condotte sulle date linee tre rette in paratesi sia il rettangolo di due di queste rette al rettangolo della rimanente, e di una retta data di grandezza in una data ragione.

Siano AB, CD, ed EF le rette date di sito. Bisogna ritrovare un punto G, dal quale tirate sulle date linee AB, CD, ed EF le rette in paratesi GA, GC, e GF rispettivamente sia il rettangolo di due di queste rette, poniamo delle due GA, e GC al rettangolo della rimanente GF, e della retta H data di grandezza nella ragione delle date rette I, e K (1).

(1) N. B. Nelle particolari descrizioni di questo, e de'sequenti Porismi, potendosi facilmente sottintendere le rette in paratesi, vi si tralasciano per non complicar troppo le figure.

PROPOSIZIONE I.

Sieno parallele le date rette AB , CD , ed EF (*Fig. 2.*). Bisogna ritrovare quel punto, che si è proposto dianzi.

Suppongasì ritrovato cotesto punto, e sia il punto G , da cui si tirino sulle date rette AB , CD ; ed EF le GL , GM , e GN parallele ad una qualunque retta QS , che seghi le AB , CD , ed EF ne' punti Q , R , ed S rispettivamente, sarà per lo lemma precedente il rettangolo LGM al rettangolo HGN in una data ragione, che rinvergasi uguale a quella delle date rette O e P : quindi tirata dal punto G la retta GT parallela ad AB , CD , ed EF , che seghi la QS nel punto T , sarà pe' parallelogrammi LT , GR , e GS il rettangolo LGM uguale al rettangolo QTR , ed il rettangolo HGN uguale al rettangolo HTS ; e perciò sarà pure il rettangolo QTR al rettangolo HTS , siccome O a P . Ma è data la retta QS , ed in questa son dati i punti Q , R , ed S . Dunque sarà dato ancora il punto T , e la TG , in cui ne giace il punto G , sarà una retta data di sito.

Intanto compongasì il problema in questo modo.

Si tiri ovunque la retta QS , che seghi le date rette AB , CD , ed EF ne' punti Q , R , ed S rispettivamente; e si esibisca, come si è detto, la ragione di O a P ; indi nella data retta QS , ed in essa

i dati punti Q, R, ed S, si ritrovi il punto T, per modo, che il rettangolo QTR stia al rettangolo HTS, come O a P (1). E finalmente si tiri pel punto T la retta TG parallela alle rette AB, CD, ed EF, e si prenda in essa il punto G ad arbitrio, donde si conduca la retta LGM parallela alla QR, che interseghi le AB, CD, ed EF ne' punti L, M, ed N rispettivamente. E poichè a cagione de' parallelogrammi GQ, GR, e GS il rettangolo QTR è uguale al rettangolo LGM, ed il rettangolo HTS è uguale al rettangolo HGN, e per costruzione il rettangolo QTR sta al rettangolo HTS, come O a P, sarà benanche il rettangolo LGM al rettangolo HGN, come O a P; e quindi tirate le rette in paratesi GA, GC, e GF sulle AB, CD, ed EF; sarà ancora per il lemma precedente il rettangolo delle GA, e GC al rettangolo della GF, e della H nella data ragione di I a K. Per la qual cosa G è il punto richiesto, e ne tocca la retta GT. C. B. R.

PROPOSIZIONE II.

Sieno parallele due delle date rette, poniamo in primo luogo le AB, e CD, e la rimanente EF le seghi ne' punti U, e V (Fig. 3.). Bisogna ritrovare un punto, come si è proposto di sopra.

(1) Vedi Simpson *de sectione determinata lib. 1. prob. III.*

Suppongasi essere G il punto richiesto, dal quale si tirino sulle date rette AB , e CD le GL , e GM parallele ad EF , e sulla EF la GN parallela alle AB , e CD ; sarà per il lemma precedente il rettangolo LGM al rettangolo HGN nella data ragione di O a P , che pongasi uguale alla ragione delle date rette Q ed H . E perchè in questa ragione di Q ad H l'è ancora il rettangolo QGN al rettangolo HGN (1. *El. VI.*); perciò sarà il rettangolo LGM al rettangolo HGN , come il rettangolo QGN allo stesso rettangolo HGN ; e quindi il rettangolo LGM è uguale al rettangolo QGN . Ma il rettangolo LGM è uguale alla differenza del quadrato di MR metà di ML , e del quadrato di RG (5. *El. II.*). Dunque anche il rettangolo QGN sarà uguale alla differenza de' quadrati di MR , e di GR , e con ciò il quadrato di GR è uguale alla differenza del quadrato di MR , e del rettangolo QGN . Or essendo data la MR metà di ML , ovvero di VU , l'estremo R ne toccherà, come è chiaro, la data retta di sito TRS , che ne biseca ancora la VU nel dato punto S ; e perciò il dato quadrato di MR facendosi uguale al rettangolo della data retta Q , e della data retta ST presa lungo la retta SR , sarà la differenza del quadrato di RM , e del rettangolo QGN uguale alla differenza de' rettangoli QST , e QGN , cioè al rettangolo QRT . Ma la differenza del quadrato di RM , e del rettangolo QGN s'è mostrata uguale al quadrato di RG . Dunque sarà

ancora il quadrato di RG uguale al rettangolo QRT . Ma n'è dato il punto T , e la TR è data di sito, ed è dato l'angolo TRG . Dunque il punto G toccherà una data parabola.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si ritrovi la ragione di O a P , che pongasi uguale a quella delle rette Q , ed H , come si è detto: e si bisechi la VU nel punto S , d'onde si tiri la ST parallela alle AB , e CD , che facciasi terza proporzionale in ordine a Q , e VS . Indi si descriva la parabola VTU , che abbia il punto T per vertice, la retta TS per diametro, e le ordinate a questo diametro sieno parallele alla retta EF (*p. 52. lib. 1. Conq. di Ap.*); sarà chiaro, che la descritta parabola dovrà passare pe' punti V , ed U , essendo per costruzione il quadrato di VS , metà di VU , uguale al rettangolo QST . Or si prenda un punto G ad arbitrio nel perimetro di detta parabola, e tirate per esso sulle date rette AB , e CD le GL , e GM parallele ad EF , e sulla EF condotta la GN parallela ad AB , e CD , sarà il quadrato di RM del pari, che il quadrato di SV uguale al rettangolo QTS , ed il quadrato di RG sarà uguale al rettangolo QTR : quindi la differenza de' quadrati di MR , e di RG sarà uguale alla differenza de' rettangoli QTS , e QTR . Ma la differenza de' quadrati di MR , e di RG è uguale al rettangolo LGM ,

★

e la differenza de' rettangoli QTS, e QTR è uguale al rettangolo QRS, ovvero al rettangolo QGN. Dunque sarà il rettangolo LGM uguale al rettangolo QGN. Ma il rettangolo QGN sta al rettangolo HGN, come Q ad H, ovvero come O a P. Dunque sarà pure il rettangolo LGM al rettangolo HGN, come O a P; ed intendendosi tirate rispettivamente sulle AB, CD, ed EF le rette in paratesi GA, GC, e GF, avremo ancora il rettangolo AGC al rettangolo HGF, come I a K; e perciò G n'è il punto richiesto, e ne tocca la descritta parabola VTU. C. B. R.

S C O L I O.

Se mai la retta CD ne coincida colla retta AB, vale a dire, diensi di sito le due rette AB, ed EF, che s'intersechino nel punto U (*fig. 4.*), e si cerchi il punto G per modo, che tirate da esso sulle AB, ed EF le rette in paratesi GA, e GF, sia il quadrato di GA al rettangolo HGF, come I a K; allora compiuto il parallelogrammo GLUN, ben si vede essere il quadrato di GL al rettangolo HGN, come O a P, ovvero, come Q a K: quindi avremo il quadrato di GL uguale al rettangolo QGN, ed il punto G ne toccherà una data parabola, di cui la retta UB n'è il diametro, com'è chiaro, U n'è il vertice, le ordinate al diametro sono parallele ad EF, e la data retta Q n'è il parametro.

PROPOSIZIONE III.

In secondo luogo la retta EF sia parallela ad una delle due rimanenti, poniamo alla retta AB. (*Fig. 5.*). Bisogna ritrovare un punto, che abbia le condizioni esposte nel porisma.

Suppongasi ritrovato cotesto punto, e sia G, da cui si tirino sulle date rette AB, CD, ed EF le GL, GM, e GN parallele a qualunque retta QR, che ne segli le AB, CD, ed EF ne' punti Q, R, ed S rispettivamente, sarà, com'è chiaro, la LN data di grandezza, e per il lemma precedente sarà il rettangolo MGL al rettangolo HGN nella data ragione di O a P, che pongasi uguale a quella delle date rette T, ed H: e perchè in questa ragione P è pure il rettangolo TGL al rettangolo HGL, perciò sarà benanche il rettangolo MGL al rettangolo HGN, come il rettangolo TGL al rettangolo HGL: e quindi cadendo il punto G tra i punti L, ed N, i conseguenti di quest' analogia, cioè i rettangoli HGN, ed HGL pres' insieme saranno uguali al dato rettangolo HLN; ed aggiunta alla GM per dritto la MV uguale alla data retta T, l'estremo V ne toccherà una data retta di sito VU, ed i rettangoli MGL e TGL antecedenti di detta analogia pres' insieme saranno uguali al rettangolo VGL: E donde essendo il rettangolo MGL al rettangolo HGN, come il rettangolo TGL al rettangolo HGL; sarà per la 12. El. V. il rettangolo VGL al rettangolo HLN, come il

rettangolo TGL al rettangolo HGL. Ma il rettangolo TGL sta al rettangolo HGL, siccome T ad H, ovvero, come il rettangolo TLN al rettangolo HLN. Dunque sarà ancora il rettangolo VGL al rettangolo HLN, come il rettangolo TLN allo stesso rettangolo HLN; e perciò sarà il rettangolo VGL uguale al dato rettangolo TLN. Che se poi il punto G ne cada al di fuori de' punti L, ed N, allora argomentando per la 19. El. V. e togliendo dalla GM la MV uguale alla data retta T, ne concluderemo ancora il rettangolo VGL essere uguale al dato rettangolo TLN. Per la qual cosa il punto G ne toccherà una data iperbole.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si tiri ovunque la retta QR, che seghi le AB, CD, ed EF ne' punti Q, R, ed S rispettivamente, e si ritrovi, come si è detto, la ragione di O a P, che facciasi uguale a quella delle rette T, ed H: e presa lungo la QR prolungata la Rv uguale alla data retta T, si tiri dal punto v la vU parallela a CD, che tagli la retta AB nel punto U. Indi dal punto U si tiri la retta UX, e vi si prendano d' ambe le parti del punto U le UX, ed UY, ciascuna delle quali sia media proporzionale tra le rette QS, e T. E finalmente descrivansi le iperboli opposte GX, e GY, che abbiano per asintoti le rette AB, e vU, e passino rispettivamente pe' punti X, ed Y

(*p. 4. lib. II. Con. di Ap.*). Or si prenda ovunque nel perimetro di queste iperboli il punto G, da cui si tiri la retta GL parallela alla retta QR, che segghi le date rette AB, CD, EF, e vU ne' punti L, M, N, e V rispettivamente. E poichè a cagione delle descritte iperboli (*p. 11. lib. II. Con. di Ap.*) il rettangolo VGL è uguale al quadrato di UX, che per costruzione ne pareggia il rettangolo TQS, ovvero TLN, sarà il rettangolo VGL anche uguale al rettangolo TLN. Ma il rettangolo TLN sta al rettangolo HLN, come T ad H. Dunque sarà ancora il rettangolo VGL al rettangolo HLN, come T ad H. Ma T sta ad H, come il rettangolo TGL al rettangolo HGL. Dunque sarà pure il rettangolo VGL al rettangolo HLN, come il rettangolo TGL al rettangolo HGL; e quindi per la 19, ovvero per la 12. El. V. secondochè il punto G ne cade tra' punti L, ed N, ovvero ne cade al di fuori, sarà il rettangolo MGL al rettangolo HGN, siccome il rettangolo TGL al rettangolo HGL. Ma il rettangolo TGL sta al rettangolo HGL, come T ad H, ovvero come O a P. Dunque sarà il rettangolo MGL al rettangolo HGN, come O a P: e quindi condotte le rette in paratesi GA, GC, e GF sarà per il lemma precedente il rettangolo delle GA, e GC al rettangolo HGF, come I a K: e perciò G n' è il punto richiesto, e ne tocca le descritte iperboli XG, ed YG. C. B. R.

PROPOSIZIONE IV.

Le date rette AB , CD , ed EF si interseghino nello stesso punto Q (*Fig. 6.*). Bisogna ritrovare quel punto, che si è proposto di sopra.

Suppongasì essere G il punto richiesto, da cui si tirino rispettivamente sulle date rette AB , CD , ed EF le rette GL , e GM parallele ad EF , e GN parallela alla QR , che unisce il dato vertice Q del triangolo LQM , ed il punto medio R della base LM . Questa congiungente, com'è chiaro, biseccherà nel punto S qualunque retta TSV parallela ad EF , e che seghi le AB , e CD ne' punti T , e V rispettivamente, ed ella sarà data di sito del pari, che la retta EF . Adunque per il lemma precedente sarà il rettangolo LGM al rettangolo HGN nella ragione delle date rette O , e P . Ma n'è poi data la ragione del quadrato di QR al quadrato di RM . Adunque se prendasi il rettangolo UQR , che stiane al rettangolo LGM , come il quadrato di QR al quadrato di MR , sarà ancora il rettangolo URQ al quadrato di RG nella data ragione del quadrato di QR al quadrato di RM (*2. El. V.*). Inoltre essendo date le ragioni del rettangolo UQR al rettangolo LGM , e del rettangolo LGM al rettangolo HGN , sarà anche data la ragione del rettangolo UQR al rettangolo HGN ovvero la ragione di UQ ad H , che l'è uguale (*1. El. VI.*): e quindi la UQ data di sito sarà anche data di grandezza. Ma si è mostrato il

rettangolo URQ al quadrato di RG nella data ragione del quadrato di QR al quadrato di RM. Dunque il punto G ne toccherà una data iperbole.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si tiri ovunque la retta TV parallela ad EF, che interseghi le AB, e CD ne' punti T, e V rispettivamente, ed unito il di lei punto medio S col punto Q mediante la SQ, si esibisca, come si è detto, la ragione di O a P. Indi si ritrovi la retta X, che stia ad O in duplicata ragione di QS ad SV, e si prenda la QU quarta proportionale in ordine alle rette P, X, ed H: e si bisechi la QU nel punto Y, dal quale si tiri la retta Yy parallela ad EF, che segghi la CD nel punto y. E finalmente s'intendano descritte le iperboli opposte QG, ed UG, che abbiano per semidiametri conjugati QY, ed Yy; e da un qualunque punto G preso nel perimetro di ciascuna di queste iperboli si tirino rispettivamente sulle date rette AB, CD, ed EF le GL, e GM parallele ad EF, e la GN parallela alla retta QS, delle quali la retta GL segghi la retta QS nel punto R. E poichè a cagione della iperbole QG sta il quadrato di RG al rettangolo URQ, come il quadrato di Yy al quadrato di YQ, e pe' triangoli simili yYQ, e QRM sta il quadrato di Yy al quadrato di YQ, siccome il quadrato di MR al quadrato di QR, sarà il quadrato di RG

al rettangolo URQ, siccome il quadrato di MR al quadrato di QR; e con ciò sarà il rettangolo LGM al rettangolo UQR, siccome il quadrato di MR al quadrato di QR (19. *El. V*). Ma pe' triangoli simili QRM, e QSV il quadrato di MR sta al quadrato di QR, come il quadrato di VS al quadrato di QS, ovvero per costruzione, come O ad X. Dunque sarà ancora il rettangolo LGM al rettangolo UQR, come O ad X. Ma il rettangolo UQR sta al rettangolo HGN, come QU ad H, ovvero per costruzione, come X a P. Dunque sarà per equalità ordinata il rettangolo LGM al rettangolo HGN, siccome O a P. Ed intendendosi condotte dal punto G le rette in paratesi GA, GC, e GF rispettivamente sulle AB, CD, ed EF, sarà benanche il rettangolo delle GA, e GC al rettangolo HGF, come I a K, (*lem. préc.*); e quindi G è il punto richiesto, e ne tocca le iperboli opposte QG, ed UG. C. B. R.

PROPOSIZIONE V.

Finalmente le date rette AB, CD, ed EF si interseghino ne' punti Q, R, ed S (*Fig. 7, 8, e 9*). Bisogna ritrovare quel punto, che si è proposto nel porisma.

Suppongasi essere G il punto richiesto, dal quale si tirino rispettivamente sulle date rette AB, CD, ed EF le GL, e GM parallele ad EF, e la GN parallela alla QT, che ne congiunge il

vertice Q del triangolo QRS, ed il punto medio T della base RS. Questa congiungente, come l'è chiaro, ne bisecherà la LM nel punto U, ove l'incontra, e sarà data di sito al pari della retta EF: onde per lo lemma precedente sarà il rettangolo LGM al rettangolo HGN in una data ragione, che rinvengasi uguale a quella delle date rette O, e P. Ma n'è data la ragione del quadrato di LU al quadrato di UQ. Adunque se in questa data ragione supponiamo essere lo stesso rettangolo LGM al rettangolo delle TU, e QV, ne sarà benanche data la ragione del rettangolo HGN al rettangolo di TU, e QV (*prop. 8. de' dati*) ovvero la ragione di H a QV, che l'è uguale (*prop. 1. Elem. VI.*); e con ciò la QV sarà data di grandezza, ed il punto V sarà dato di sito. Or nella retta TQV prendansi i punti X, ed Y per modo, che il rettangolo VXQ sia uguale al dato rettangolo VQT, e la VY uguale alla QX, saran dati i punti X, ed Y: e supponendo in primo luogo, che il punto G (*Fig. 7.*) ne cada fuori dell'angolo AQC, e quindi il punto U fuori de' punti Y, e T, e dalla parte YT, sarà il quadrato di QU insieme col rettangolo delle TU, e QV uguale al rettangolo YUX, come dimostreremo nel secondo lemma seguente. Laonde essendo per costruzione il rettangolo LGM al rettangolo delle TU, e QV, come il quadrato di LU al quadrato di UQ, sarà per la 12 El. V. il quadrato di GU al rettangolo YUX,

come il quadrato di LU al quadrato di UQ. Che se poi il punto G suppongasi cadere al di dentro dell'angolo AQC (*Fig. 8, e 9*), allora sarà il quadrato di LU maggiore del rettangolo LGM (*5. El. II.*), ed essendo per costruzione il rettangolo LGM al rettangolo delle TU, e QV, come il quadrato di LU al quadrato di UQ, sarà ancora il quadrato di UQ maggiore del rettangolo delle TU, e QV, e l'eccesso ne sarà per l'appunto il rettangolo YUX, ed il punto U ne caderà tra' punti T, ed X, ovvero al di fuori de' punti T, ed Y, e dalla parte TY, come si rileverà nel secondo lemma, che siegue. Laonde argomentando per la 19. El. V. avremo similmente il quadrato di GU al rettangolo YUX, come il quadrato di LU al quadrato di UQ. Ma l'è data questa ragione. Dunque il punto G ne toccherà una data iperbole.

Intanto il problema compongasi in questo modo

Si divida in parti uguali la RS nel punto T, ed unita la TQ si ritrovi la ragione di O a P, come si è detto, e si faccia O a Z in duplicata ragione di TR. a TQ. Indi prolungata la TQ si prenda la QV quarta proporzionale in ordine alle rette P, Z, ed H, e si faccia il rettangolo VXQ uguale al rettangolo VQT, e presa la VY uguale alla QX si bisechino le QV, ed XY nel punto q, donde si tirino le qr, e qs parallele rispettivamente alle

QR, e QS, che ne sechino in r, ed in s' la retta rXs, che dal punto X conducasi parallela alla EF. Finalmente si descrivano le iperboli opposte XG, ed YG, che abbiano per loro semidiametri conjugati le qX, ed Xr, e quindi le qr, e qs saranno i loro asintoti, e le QR, e QS parallele rispettivamente a qr, ed a qs segheranno la curva, ciascuna in un sol punto (*prop. 13. lib. II. Con. di Apol.*), e questi punti di intersezione sono R, ed S. Imperciocchè il quadrato di ciascuna delle semiordinate corrispondenti alla ascissa XT sta al rettangolo YTX, siccome il quadrato di rX al quadrato di qX, ovvero pe' triangoli simili rqX, ed RQT, siccome il quadrato di ciascuna delle TR, e TS al quadrato di TQ; ma il rettangolo YTX è uguale al quadrato di TQ, come si rileverà nel primo lemma, che siegue. Dunque i quadrati delle dette semiordinate sono uguali rispettivamente a' quadrati delle TR, e TS, ed essendo queste al pari di quelle equidistanti dalla rs, ne coincideranno tra loro; e perciò i punti R, ed S ne toccano l' iperbole XG. Ciò posto prendasi ovunque nel perimetro delle due iperboli XG, ed YG il punto G, da cui si tirino sulle rette AB, CD, ed EF le GL, e GM parallele ad EF, e la GN parallela alla QT, sarà, com'è chiaro, la LM bisecata dalla QT nel punto U, ove l' incontra, ed a cagione delle iperboli XG, ed YG sarà il quadrato di GU al rettangolo YUX, siccome il quadrato di rX

quadrato di qX , ovvero pe' triangoli simili rqX , ed LQU , siccome il quadrato di LU al quadrato di QU : e quindi per la 19. El. V, come sta il quadrato di LU al quadrato di UQ , così il rettangolo LGM alla differenza del rettangolo YUX , e del quadrato di QU . Ma questa differenza è uguale al rettangolo di TU , e QV , come si rileverà nel secondo lemma, che siegue, e per costruzione il quadrato di LU sta al quadrato di UQ , come O a Z . Dunque sarà ancora il rettangolo LGM al rettangolo di TU , e VQ , come O a Z . Ma il rettangolo di TU , e VQ sta al rettangolo HTU , siccome QV ad H , ossia per costruzione come Z a P . Dunque sarà per equalità ordinata il rettangolo LGM al rettangolo HTU o sia HGN , come O a P . Laonde condotte sulle AB , CD , ed EF le rette in paratesi GA , GC , e GF rispettivamente, sarà benanche il rettangolo delle GA , e GC al rettangolo HGF , siccome I a K (*lem. prec.*); e perciò G è il punto richiesto, e ne tocca le due iperboli opposte XG , ed YG . C. B. R.

L E M M A I.

Sieno i quattro punti Y , V , Q , ed X nella retta YX (*Fig. 10.*), per modo che la YV pareggi la QX , e vi si prenda in primo luogo il punto U tra' punti V , e Q . Dico essere i rettangoli VUQ , e VXQ pres' insieme uguali al rettangolo YUX .

Si bisechino le rette VQ , ed YX nel punto

q. E poichè il rettangolo VXQ è uguale alla differenza de' quadrati di qX, e di qQ, (6. *El. II.*), ed il rettangolo VUQ è uguale alla differenza de' quadrati di qQ, e di qU (5. *El. II.*), saranno i due rettangoli VXQ, e VUQ pres' insieme uguali alla differenza de' quadrati di qX, e di qQ una colla differenza de' quadrati di qQ, e di qU; cioè a dire alla differenza de' quadrati di qX, e di qU. Ma questa differenza è uguale al rettangolo YUX (5. *El. II.*). Dunque i due rettangoli VXQ, e VUQ pres' insieme sono nguali al rettangolo YUX.

In secondo luogo il punto U prendasi fuori de' punti V, ed X (*Fig. 11.*). Dico essere la differenza de' rettangoli VXQ, e VUQ uguale al rettangolo YUX.

Imperciochè la differenza de' rettangoli VXQ, e VUQ è uguale alla differenza de' medesimi rettangoli, a ciascuno de' quali siane aggiunto di comune il quadrato di qQ, vale a dire la differenza de' rettangoli VXQ, e VUQ è uguale alla differenza de' quadrati di qX, e di qU (5. *El. II.*). Ma essendo per costruzione la qX uguale alla qY, la differenza de' quadrati di qX, e di qU ne pareggia il rettangolo YUX (6. *El. II.*). Dunque la differenza de' rettangoli VXQ, e VUQ, sarà uguale al rettangolo YUX C. B. D.

COR. Quindi se prendasi il punto T nella retta YX per modo, che il rettangolo VQT sia uguale al rettangolo VXQ (*Fig. 12.*); sarà la differenza

de' rettangoli VXQ , e VTQ uguale al quadrato di QT (3. *El.* 11.). Ma questa differenza è uguale ancora al rettangolo YTX . Dunque sarà il quadrato di QT uguale al rettangolo YTX .

LEMMA II.

Sieno i punti Y , V , Q , X , e T nella retta YT (*Fig. 12.*) per modo, che il rettangolo VXQ sia uguale al rettangolo VQT , e la YV uguale alla QX . Dico, che ovunque si prenda nella retta YT il punto U fuori de' punti Y , e T , e verso la parte YT , il quadrato di QU , ed il rettangolo di TU , e VQ pres' insieme sono sempre uguali al rettangolo YUX .

Imperciocchè il rettangolo di VQ , e di TU è uguale alla differenza de' rettangoli VQU , e VQT , aggiuntovi di comune il quadrato di QU , sarà il quadrato di QU insieme col rettangolo di VQ , e di TU uguale alla differenza de' rettangoli VUQ , e VQT ; ma questa differenza è uguale al rettangolo YUX , essendo per ipotesi il rettangolo VQT uguale al rettangolo VXQ . Dunque il quadrato di QU insieme col rettangolo di VQ , e TU è ancora uguale al rettangolo YUX .

COR. E con ciò il rettangolo di TU , e QV è uguale alla differenza del quadrato di QU , e del rettangolo YUX .

In secondo luogo il punto U prendasi tra' punti Y , e T , ovvero al di fuori di essi, e verso la

parte TY (*Fig. 13, 14, 15, e 16.*). Dico essere la differenza del quadrato di QU, e del rettangolo di TU, e VQ uguale al rettangolo YUX.

Prendasi primieramente il punto U tra i punti Q, e T (*Fig. 13.*). E poichè la differenza del quadrato di QU, e del rettangolo di TU, e VQ è uguale alla differenza di questi medesimi spazii, a ciascuno de' quali sia aggiunto lo stesso rettangolo VQU, sarà la differenza del quadrato di QU, e del rettangolo di TU, e VQ uguale alla differenza de' rettangoli VUQ, e VQT, ossia VXQ, che l'è uguale per ipotesi: ma la differenza de' rettangoli VUQ, e VXQ ne pareggia il rettangolo YUX (*lem. prec.*): dunque sarà ancora la differenza del quadrato di QU, e del rettangolo di TU, e VQ uguale al rettangolo YUX. E lo stesso si concluderà parimente togliendo il rettangolo VQU dal quadrato di QU, e dal rettangolo di TU, e VQ, quante volte il punto U ne cada tra' punti V, ed Y (*Fig. 14.*).

Che se poi il punto U prendasi tra' punti V, e Q (*Fig. 15.*), allora il rettangolo di VQ, e TU è uguale a' rettangoli VQU, e VQT pres' insieme; onde toltovi di comune il quadrato di QU, sarà la differenza del quadrato di QU, e del rettangolo di VQ, e TU uguale a' rettangoli pres' insieme VUQ, e VQT ossia VXQ, che l'è uguale per ipotesi. Ma i due rettangoli VUQ, e VXQ presi insieme sono uguali al rettangolo YUX (*lem. prec.*): dunque sarà benanche la differenza del

quadrato di QU , e del rettangolo di TU , e VQ uguale al rettangolo YUX .

Finalmente il punto U ne cada fuori de' punti T , ed Y , e dalla parte TY (*Fig. 16.*). E poichè il rettangolo di VQ , e TU è uguale a' rettangoli UQV , e VQT pres'insieme (*I. El. II.*), toltone di comune il quadrato di QU , sarà la differenza del quadrato di QU , e del rettangolo di VQ , e TU uguale alla differenza de' rettangoli QUV , e VQT . Ma questa differenza ne pareggia il rettangolo YUX , essendo per ipotesi il rettangolo VQT uguale al rettangolo VXQ . Dunque sarà benanche la differenza del quadrato di QU , e del rettangolo di TU , e VQ uguale al rettangolo YUX . C. B. D.

COR. Quindi se il quadrato di QU sia maggiore del rettangolo delle TU , e VQ , ne sarà anche maggiore del rettangolo YUX , e questo eccesso sarà per l'appunto il rettangolo delle TU , e VQ .

SCOLIO.

Intanto essendo per ipotesi (*Fig. 12.*) il rettangolo VXQ uguale al rettangolo VQT , sarà chiaro, che toltone di comune il rettangolo VQX resterà il quadrato di QX uguale al rettangolo delle TX , e VQ . Similmente il rettangolo QYV , ch'è lo stesso che il rettangolo VXQ , è ancora uguale al rettangolo VQT . Laonde aggiuntovi di comune il rettangolo YQV , ne risulterà il qua-

drato di QY uguale al rettangolo di TY, e VQ. Ora se prendasi il quadrato di QU maggiore del rettangolo delle TU, e VQ, (*Fig. 14.*) il punto U ne caderà fuori de' punti T, ed Y, e dalla parte TY, ovvero ne caderà fra' punti X, e T. Imperciocchè cadendo tra' punti Q, ed Y, sarebbe il quadrato di QU minore del quadrato di QY, ovvero del rettangolo di TY e VQ, che dianzi gli si è mostrato uguale, e con ciò sarebbe minore molto di più del rettangolo di TY, ed UQ. Lo che ripugna all' ipotesi. E lo stesso assurdo si rileverebbe, se mai il punto U ne cadesse tra' punti Q, ed X.

LEMMA AL PORISMA SEGUENTE.

Sieno date di sito le rette AB, CD, ed EF (*fig. 17.*), a cui dal punto G si tirino rispettivamente le rette in paratesi GA, GC, e GE per modo, che il rettangolo di due di queste, poniamo delle GA, e GC, stia al quadrato della rimanente GE nella ragione delle date rette H, ed I; indi dallo stesso punto G si conducano sulle medesime rette AB, CD, ed EF rispettivamente le GK, GL, e GM, che facciano con quelle anche angoli dati. Dico essere ancora il rettangolo KGL al quadrato di GM in una data ragione. E viceversa, se in questa data ragione stia il rettangolo KGL al quadrato di GM, intendendosi già tirate le rette in paratesi GA, GC, e GE, dico

★

essere benanche il rettangolo AGC al quadrato di GE, come H ad I.

Imperciocchè essendo dati per ipotesi gli angoli GAK, e GKA del triangolo GKA, sarà data la ragione di GK a GA. Similmente per essere dati gli angoli GCL, e GLC del triangolo GCL sarà data la ragione di GL a GC; e quindi sarà anche data la ragione del rettangolo KGL al rettangolo AGC, che pongasi uguale a quella delle date rette N, ed H. Ma per ipotesi il rettangolo AGC sta al quadrato di GE, come H ad I. Dunque sarà per equalità ordinata il rettangolo KGL al quadrato di GE, come N ad I. Ma per essere dati gli angoli GEM, e GME del triangolo GEM, n'è data la ragione del quadrato di GE al quadrato di GM, che facciasi uguale a quella delle date rette I, ed O. Dunque di nuovo per equalità ordinata sarà il rettangolo KGL al quadrato di GM, come N ad O, cioè in una data ragione.

Viceversa, sia il rettangolo KGL al quadrato di GM nella data ragione di N ad O, e sieno tirate le rette in paratesi GA, GC, e GE. Dico essere ancora il rettangolo AGC al quadrato di GE, come H ad I.

Imperciocchè essendo per costruzione il rettangolo KGL al rettangolo AGC, come N ad H; sarà invertendo il rettangolo AGC al rettangolo KGL, come H ad N. Ma il rettangolo KGL è per ipotesi al quadrato di GM, come N ad O,

ed il quadrato di GM per costruzione sta al quadrato di GE, come O ad I. Dunque per egualità ordinata sarà il rettangolo AGC al quadrato di GE, come H ad I. C. B. D.

P O R I S M A S E C O N D O.

Date di sito tre linee rette, ritrovare un punto, dal quale condotte sulle date linee tre rette in paratesi, sia il rettangolo di due di queste rette al quadrato della rimanente in una data ragione.

Sieno AB, CD, ed EF le rette date di sito. Bisogna ritrovare un punto G, dal quale tirate sulle date linee AB, CD, ed EF le rette in paratesi GA, GC, e GE rispettivamente, sia il rettangolo di due di queste rette, poniamo delle GA, e GC, al quadrato della rimanente GE nella ragione delle date rette H, ed I.

PROPOSIZIONE I.

Sieno parallele le date rette AB, CD, ed EF (*Fig. 18*). Bisogna ritrovare quel punto, che si è proposto dianzi.

Suppongasì essere G il punto richiesto, da cui si tirino sulle date rette AB, CD, ed EF le GK, GL, e GM parallele ad una data retta PQ, che sechi le AB, CD, ed EF ne' punti P, R, ed S

rispettivamente, sarà per lo lemnia precedente il rettangolo KGL al quadrato di GM nella ragione delle date rette N, ed O. Ciò premesso si tiri dal punto G sulla retta PS la GQ parallela alle AB, CD, ed EF, sarà chiaro a cagione de' parallelogrammi GP, GR, e GS, che il rettangolo KGL sia uguale al rettangolo PQR, ed il quadrato di GM uguale al quadrato di QS. Ma si è dimostrato il rettangolo KGL al quadrato di GM, come N ad O. Dunque in questa data ragione sarà pure il rettangolo PQR al quadrato di QS. Ma è data la retta PR, ed in essa sono dati i punti P, R, ed S. Dunque sarà ancora dato il punto Q, e quindi la QG, in cui ne giace il punto G, è una retta data di sito.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si tiri ovunque la retta PR, che seghi le date rette AB, CD, ed EF ne' punti P, R, ed S rispettivamente, e si esibisca, come si è detto, la ragione di N ad O: indi nella data retta PR, ed in essa i dati punti P, R, ed S, si ritrovi il punto Q per modo, che il rettangolo PQR stia al quadrato di QS nella data ragione di N ad O (1). Finalmente si tiri dal punto Q la retta QG paral-

(1) Vedi Roberto Simson *de Sectione determinata* lib. I. Probl. V.

lela alle rette AB, CD, ed EF, ed in essa si prenda un qualunque punto G, dal quale si conduca la retta GK parallela a PQ, che seghi le rette AB, CD, ed EF ne' punti K, L, ed M rispettivamente. È poichè a cagione de' parallelogrammi QK, QL, e QM il rettangolo PQR è uguale al rettangolo KGL, ed il quadrato di QS è uguale al quadrato di GM, e per costruzione il rettangolo PQR sta al quadrato di QS, come N ad O, sarà ancora il rettangolo KGL al quadrato di GM, come N ad O: quindi condotte dal punto G sulle AB, CD, ed EF le rette in paratesi GA, GC, e GE sarà benanche per lo lemma precedente il rettangolo delle GA, e GC al quadrato di GE, come H ad I; e perciò G è il punto richiesto, e tocca la retta GQ parallela alle date rette AB, CD, ed EF. C. B. R.

PROPOSIZIONE II.

Sieno parallele due delle date rette, poniamo in primo luogo le AB, e CD, e la rimanente EF le seghi ne' punti P, e Q (*fig. 19.*). Bisogna ritrovare quel punto, che s'è proposto di sopra.

Suppongasi essere G il punto richiesto, dal quale si tirino rispettivamente sulle date rette AB, CD, ed EF le GK, e GL parallele ad EF, e la GM parallela ad AB, e CD, sarà per lo lemma precedente il rettangolo KGL al quadrato di GN in una data ragione, che rinvergasi uguale a quella

delle date rette N , ed O . Ma il rettangolo KGL a cagione de' parallelogrammi GP , e GQ è uguale al rettangolo PMQ . Dunque sarà ancora il rettangolo PMQ al quadrato di MG nella data ragione di N ad O ; e perciò il punto G ne toccherà una data ellisse, ovvero una data iperbole, secondochè esso ne cada tra le parallele AB , e CD ovvero ne cada al di fuori; e l'ellisse si cambierà in un cerchio, se mai sia di uguaglianza la ragione di N ad O , e le rette AB , e CD sieno perpendicolari alla retta EF .

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si esibisca, come si è detto, la ragione di N ad O , e si ritrovi la QR quarta proporzionale in ordine alle rette N , O , e PQ : indi se il punto richiesto ne cada tra le rette AB , e CD si descriva l'ellisse PGQ , di cui la PQ ne sia il diametro, QR il parametro, e le ordinate al diametro sieno parallele alle AB , e CD ; ed ella si cambierà in un cerchio, quante volte sia di uguaglianza la ragione di N ad O , e le AB , e CD sieno perpendicolari alla retta EF . Che se poi il punto in quistione cadane al di fuori delle parallele AB , e CD , (*fig. 20.*) in tal caso co' medesimi dati si descrivano le iperboli opposte PG , e QG .

Infatti prendasi ovunque nel perimetro delle dette curve il punto G , dal quale si conducano rispettivamente sulle date rette AB , CD ,

ed EF le GK, e GL parallele ad EF, e la GM parallela ad AB, e CD. E poichè il rettangolo PMQ sta al quadrato di MG, come PQ a QR, e per costruzione PQ sta a QR, come N ad O, sarà ancora il rettangolo PMQ al quadrato di MG, come N ad O. Ma è poi a cagione de' parallelogrammi KM, e GQ il rettangolo PMQ uguale al rettangolo KGL. Dunque sarà benanche il rettangolo KGL al quadrato di GM, come N ad O: e quindi intendendosi condotte dal punto G sulle AB, CD, ed EF le rette in paratesi GA, GC, e GF, sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo delle GA, e GC al quadrato di GE, siccome K ad I; e perciò G è il punto richiesto, e ne tocca le descritte curve. C. B. R.

PROPOSIZIONE III.

In secondo luogo la retta EF sia parallela ad una delle rimanenti, poniamo alla AB, e la CD seghi le AB, ed EF ne' punti P, e Q rispettivamente (*fig. 21.*). Bisogna ritrovare un punto, che abbia le condizioni espòste nel porisma.

Suppongasi essere G il punto richiesto, da cui si tirino sulle date rette AB, EF, e CD le GK, e GM parallele a CD, e la GL parallela alle AB, ed EF, sarà per lo lemma il rettangolo KGL al quadrato di GM in una data ragione, che rinvenngasi uguale a quella delle date rette N, ed O: e presa la MR per modo, che il rettangolo delle

GK, ed MR sia uguale al quadrato di GM, sarà ancora il rettangolo KGL al rettangolo delle GK, ed MR nella data ragione di N ad O. Ma il rettangolo KGL sta al rettangolo delle GK, ed MR, come GL, o la sua uguale QM ad MR. Dunque sarà benanche QM ad MR nella data ragione di N ad O; ma è dato l'angolo QMR compreso dalle rette QM, ed MR. Adunque congiunta la QR sarà dato di magnitudine l'angolo MQR, e per esserne dato il punto Q la retta QR sarà data di sito. Or si prenda sulla RG la RS uguale alla data retta MK, sarà chiaro, che l'estremo S toccherà la retta ST data di sito, parallela alla QR, e che incontrerà la retta AB nel dato punto T. E perchè il rettangolo delle GK, ed MK è uguale per costruzione al quadrato di GM, tolti questi rispettivamente dal rettangolo KGM, resterà il rettangolo GMK uguale al rettangolo KGR. Ma è poi il rettangolo GKM uguale al rettangolo di GK, ed RS. Dunque da questi togliendone quelli rispettivamente, resterà il rettangolo SGK uguale al quadrato di MK, o della sua uguale QP, ch'è data di grandezza; e perciò il punto G ne toccherà una data iperbole.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si rinvenga, come s'è detto, la ragione di N ad O, e presa nella retta QE la QV uguale ad N si tiri dal punto V la retta VU parallela a

CD, che facciasi uguale ad O, e si congiunga la retta UQ: indi si tagli dalla retta QC la porzione QX uguale a QP, e si meni dal punto X la XS parallela alla retta UQ, che incontri la retta AB nel punto T, e si congiunga la QT, la quale si prolunghi verso Y, finchè TY sia uguale a TQ. Finalmente si descrivano le iperboli opposte QG, ed YG, che abbiano per asintoti le rette TB, e TS, e passino pe' dati punti Q, ed Y, o ch'è lo stesso, abbiano QT, e QP per loro semidiametri conjugati (*p. 4. lib. II. Con. di Ap.*). Ciò premesso, prendasi ovunque nel perimetro di queste iperboli un punto G, da cui si tirino rispettivamente sulle date rette AB, EF, e CD le GK, e GM parallele a CD, che incontrino la UQ nel punto R, e la GL parallela alle AB, ed EF. E poichè le rette TB, e TS sono gli asintoti delle iperboli QG, ed YG, sarà il rettangolo SGK uguale al quadrato della QP, ovvero della sua uguale MK (*p. 22. l. II. Con. di Ap.*); ma essendo per costruzione QX uguale a QP, sarà ancora a cagione de' parallelogrammi QS, e QK, SR uguale ad MK, ed il rettangolo di GK, ed RS uguale al rettangolo GKM, e toltone rispettivamente da essi il rettangolo SGK, ed il quadrato di MK, che si sono mostrati tra loro uguali, resterà il rettangolo KGR uguale al rettangolo GMK: e quindi le differenze di ciascuno di essi, e del rettangolo KGM saranno uguali tra di loro, vale a dire il rettangolo di GK, ed RM sarà uguale al quadrato

di GM, e con ciò sarà il rettangolo KGL al rettangolo delle GK, ed MR, come lo stesso rettangolo KGL al quadrato di GM. Ma il rettangolo KGL sta al rettangolo delle GK, ed MR, siccome GL, o la sua uguale QM ad MR, cioè pe' triangoli simili QMR, e QVU, come QV a VU. Dunque sarà pure il rettangolo KGL al quadrato di GM, come QV a VU, cioè per costruzione nella ragion data di N ad O: laonde intendendosi tirate dal punto G sulle AB, CD, ed EF le rette in paratesi GA, GC, e GE, sarà per lo lemma il rettangolo delle GA, e GC al quadrato di GE, come H al I; e perciò G è il punto richiesto, e ne tocca le descritte iperboli QG, ed YG. C. B. R.

P R O P O S I Z I O N E IV.

Le date rette AB, CD, ed EF s' interseghino nello stesso punto P (*Fig. 22*). Bisogna ritrovare quel punto, che s' è proposto di sopra.

Suppongasi essere G il punto richiesto, da cui si conducano rispettivamente sulle date rette AB, CD, ed EF le GK, e GL parallele ad EF, e la GM parallela alla PQ, che unisce il vertice P del triangolo KPL, ed il punto medio Q della sua base KL. Questa congiungente, com' è chiaro, bisecherà nel punto R qualunque data retta SRT parallela ad EF, e che segghi le AB, e CD ne' punti T, ed S rispettivamente, ed ella

sarà data di sito del pari, che la retta EF. Adunque per lo lemma precedente, sarà il rettangolo KGL al quadrato di GM in una data ragione, che rinveniasi uguale a quella delle date rette N, ed O; e presa la retta QV lungo la QK per modo, che il quadrato di QV ne adequi il rettangolo KGL, sarà ancora il quadrato di VQ al quadrato di GM, o della sua uguale QP, come N ad O, e VQ a QP anche in una data ragione, che sarà sudduplicata di quella di N ad O. Ma è poi dato l'angolo PQV compreso dalle rette QP, e QV. Dunque unita la PV, sarà dato di magnitudine l'angolo QPV, e con ciò la PV sarà data di sito, e segnerà la data retta ST nel dato punto U. Inoltre essendo il quadrato di QV uguale al rettangolo KGL, saranno le differenze di ciascuno di essi, e del quadrato di QK uguali tra loro, vale a dire il rettangolo KVL sarà uguale al quadrato di GQ; e quindi il rettangolo KVL sarà al quadrato di QP, siccome il quadrato di GQ allo stesso quadrato di QP. Ma prolungata la GP finchè incontri la ST nel punto X, il quadrato di GQ sta al quadrato di QP, siccome il quadrato di XR al quadrato di RP; dunque sarà ancora il rettangolo KVL al quadrato di QP, come il quadrato di XR al quadrato di RP: e permutando sarà il rettangolo KUL al quadrato di XR, come il quadrato di QP al quadrato di RP. Ma essendo pe' triangoli simili PKV, e PTU, VPL, ed UPS, KV a PT, come

VP a PU, e VP a PU, come VL ad US, sarà ancora il rettangolo KVL al rettangolo SUT, come il quadrato di VP al quadrato di PU (23 El. VI.) ovvero pe' triangoli simili VPQ, ed UPR come il quadrato di QP al quadrato di RP. Adunque sarà il rettangolo KVL al quadrato di RX, come lo stesso rettangolo KVL al rettangolo SUT, e quindi sarà il quadrato di RX uguale al dato rettangolo SUT, e con ciò la RX sarà data di grandezza, e la PX, in cui ne giace il punto G, sarà data di sito.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si esibisca, come si è detto, la ragione di N ad O, e si tiri ovunque sulle AB, ed AC la retta TS parallela ad EF, che si biseghi nel punto R, e si congiunga la retta RP; indi prendansi lungo la retta ST la RU, che stia ad RP in sudduplicata ragione di N ad O, e le RX, ed RY, ciascuna delle quali sia media proporzionale tra le rette SU, ed UT, e si congiungano le rette UP, XP, ed YP, che si prolungano indefinitamente. Ciò premesso, in una delle rette XP, ed YP, poniamo nella retta XP, prendasi ovunque il punto G, da cui si tirino sulle AB, CD, ed EF le GK, e GL parallele ad EF, che ne incontrano la UP nel punto V, e la GM parallela ad RP. Questa retta, com'è chiaro, ne bisegherà la KL nel punto Q, ove l'incontra. E

poichè per costruzione il rettangolo SUT ne pareggia il quadrato di XR, sarà il rettangolo SUT al quadrato di RP, come il quadrato di XR allo stesso quadrato di RP, ovvero pe' triangoli simili XRP, e GQP, come il quadrato di GQ al quadrato di QP; e permutando sarà il rettangolo SUT al quadrato di GQ, come il quadrato di PR al quadrato di PQ. Ma essendo pe' triangoli simili PTU, e PKV, PUS e PVL, TU a KV, come PU a PV, e PU a PV, come US a VL, sarà ancora il rettangolo SUT al rettangolo KVL, come il quadrato di PU al quadrato di PV. (23. El. VI.), ossia pe' triangoli simili UPR, e VPQ, come il quadrato di PR al quadrato di PQ. Adunque il rettangolo SUT sarà al quadrato di GQ, come lo stesso rettangolo SUT al rettangolo KVL; e perciò sarà il quadrato di GQ uguale al rettangolo KVL, e le differenze di ciascuno di essi, e del quadrato di QK saranno uguali tra di loro: vale a dire il rettangolo KGL sarà uguale al quadrato di VQ, e quindi sarà il rettangolo KGL al quadrato di GM, come il quadrato di VQ allo stesso quadrato di GM, o della sua uguale QP. Ma pe' triangoli simili VQP, ed URP, il quadrato di VQ sta al quadrato di QP, siccome il quadrato di UR al quadrato di RP, ossia per costruzione, come N ad O. Dunque sarà ancora il rettangolo KGL al quadrato di GM nella stessa ragione di N ad O, e condotte dal punto G le rette in paratesi GA, GC, e GF sulle

AB, **CD**, ed **EF** rispettivamente, sarà per lo lemma il rettangolo delle **GA**, e **GC** al quadrato di **GE**, come **H** ad **I**: e perciò **G** è il punto richiesto, e ne tocca le rette **XP**, ed **YP**. C. B. R.

P R O P O S I Z I O N E V.

Finalmente le date rette **AB**, **CD**, ed **EF** s' interseghino ne' punti **P**, **Q**, ed **R** (*Fig. 23*). Bisogna ritrovare quel punto, che si è proposto nel porisma.

Suppongasi essere **G** il punto richiesto, da cui si tirino sulle date rette **AB**, **CD**, ed **EF** rispettivamente le **GK**, e **GL** parallele ad **EF**, e la **GM** parallela a **PS**, che unisce il vertice **P** del triangolo **PKL**, ed il punto medio **S** della base **KL**. Questa congiungente, com' è chiaro, bisegherà la **QR** nel punto **T**, ove l' incontra, e sarà data di sito al pari della **EF**, onde per lo lemma precedente sarà il rettangolo **KGL** al quadrato di **GM** in una data ragione, che rinvergasi uguale a quella delle date rette **N**, ed **O**: quindi prendendo sulla **SK** la retta **SU** per modo, che il quadrato di **SU** sia uguale al rettangolo **KGL**, sarà ancora il quadrato di **US** al quadrato di **GM**, o della sua uguale **ST** nella data ragione di **N** ad **O**, ed **US** ad **ST** anche in una data ragione, che sarà sodduplicata di quella di **N** ad **O**. Ma è dato l' angolo **TSU** compreso dalle rette **TS**, ed **SU**. Adunque unita la retta **TU**, sarà dato di

magnitudine l'angolo STU , e perchè n'è data di sito la TS , e n'è dato il punto T , la TU sarà anche data di sito, che incontrerà la data retta CD nel dato punto V (*prop. 25 de'dati*). Inoltre essendo per costruzione il rettangolo KGL uguale al quadrato di SU , saranno le differenze di ciascuno di essi, e del quadrato di SK uguali tra di loro, vale a dire il quadrato di GS sarà uguale al rettangolo KUL . Ciò posto, la ragione di QT a TP sia in primo luogo uguale alla ragione sudduplicata di N ad O , ovvero a quella di US ad ST , vale a dire la TU sia parallela ad AB , sarà la UK uguale alla retta TQ data di grandezza, e compit' i parallelogrammi $VXTY$, e $VZSY$, saranno dati, com'è chiaro, i punti X , ed Y , ed il rettangolo KUL sarà al rettangolo di KU , e VZ , come UL a VZ , ovvero pe' triangoli simili VUL , e VTR nella data ragione di TR a VX . Adunque se questa ragione facciasi uguale a quella delle date rette Yy , ed UK , sarà ancora il rettangolo KUL al rettangolo di UK , e VZ , come Yy ad UK , ovvero come il rettangolo di Yy , e VZ allo stesso rettangolo di UK , e VZ ; e quindi sarà il rettangolo KUL uguale al rettangolo di Yy , e VZ . Ma il rettangolo KUL si è mostrato uguale al quadrato di GS , ed il rettangolo di Yy , e VZ è lo stesso che il rettangolo SYy . Dunque sarà ancora il quadrato di GS uguale al rettangolo SYy ; e perciò il punto G ne toccherà una data parabola.

In secondo luogo la ragione di QT a TP sia minore, o maggiore della ragione sudduplicata di N ad O, vale a dire la TU non sia parallela ad AB, ma l'incontri nel dato punto X al di sotto, o vero al di sopra del punto P (*Fig 24, e 25*). Sarà chiaro, che le rette VY, ed XZ, condotte da' dati punti V, ed X parallele ad EF, ne incontreranno le date rette PS, AB, e CD ne' dati punti Y, Z, v, ed x rispettivamente, e compiti i parallelogrammi Yu, YU, ed St, sarà pe' triangoli simili KUX, e vVX, KU ad UX, come Vv a VX. Ma per gli altri triangoli simili XUt, ed XVu, UX sta ad Ut, come VX a Vu, ovvero alla sua uguale YZ. Dunque sarà per egualità ordinata KU ad Ut, come Vv ad YZ. Similmente compiendo il parallelogrammo Zz si mostrerà essere LU ad Us, come Xx ad Xz, o alla sua uguale YZ. Adunque sarà il rettangolo KUL al rettangolo sUt in ragione composta di Vv ad YZ, e di Xx ad YZ, cioè, come il rettangolo di Vv, ed Xx al quadrato di YZ (*23. El. VI*). Ma i rettangoli KUL, ed sUt pareggiano rispettivamente il quadrato di GS, ed il rettangolo YSZ. Dunque sarà ancora il quadrato di GS al rettangolo YSZ nella data ragione del rettangolo di Vv, ed Xx al quadrato di YZ: e perciò il punto G ne toccherà una data ellisse, ovvero una data iperbole, secondochè la ragione di QT a TP sia minore, o maggiore della ragione sudduplicata di N ad O; e l'ellisse si cambierà

in un cerchio avente YZ per suo diametro, se mai la EF sia perpendicolare alla PS , ed il rettangolo di Vv , ed Xx ne pareggi il quadrato di YZ .

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si bisechi la QR nel punto T , ed unita la PT si ritrovi, come si è detto, la ragione di N ad O : indi pel punto P si meni la retta Pp parallela ad EF , e per modo, che stia Pp a PT in sudduplicata ragione di N ad O ; e si congiunga la Tp , che seghi la CD nel punto V . Questa congiungente sia in primo luogo parallela ad AB (*Fig. 23*), vale a dire la ragione di QT a TP sia uguale alla ragione sudduplicata di N ad O , in tal caso si compia il parallelogrammo $VXTY$, e si rinvenga la Yy terza proporzionale in ordine alla VX , ovvero alla sua uguale YT , ed alla TR , e si descriva la parabola YG , di cui la retta YT ne sia il diametro, Y il vertice, la Yy il parametro, e le ordinate al diametro sieno parallele alla retta EF , sarà manifesto, che la descritta parabola dee passare pe' punti Q , ed R , essendo per costruzione il quadrato di TR , metà di QR , uguale al rettangolo TYy ; e perchè prodotta la VY finchè incontri la AB nel punto v , essa ne pareggia, com'è chiaro, la Yv , anche la TY ne pareggerà la YP a cagione de' triangoli simili VYT , e PYv ; onde le AB e CD saranno

tangenti della parabola ne' punti Q, ed R. Ciò posto, prendasi ovunque nel perimetro di detta parabola un punto G, da cui si tirino sulle AB, CD, ed EF rispettivamente le GK, e GL parallele ad EF, che seghino la VX nel punto Z, e la GM parallela a PT, questa retta, come è chiaro, biseccherà la KI nel punto S, ove l' incontra. E poichè a cagione de' triangoli simili UVL, e TVR sta UL a VZ, come TR a VX, ovvero per costruzione come Yy a TQ, o alla sua uguale KU, sarà ancora (*I. El. VI.*) il rettangolo KUL al rettangolo di KU, e VZ, come il rettangolo di Yy, e VZ allo stesso rettangolo di KU, e VZ; e perciò sarà il rettangolo KUL uguale al rettangolo di Yy, e VZ; ma questo rettangolo, è lo stesso di SYy, che ne pareggia il quadrato di GS a cagione della parabola GY. Dunque sarà benanche il rettangolo KUL uguale al quadrato di GS, e le differenze di ciascuno di essi, e del quadrato di SK saranno uguali tra loro, vale a dire il quadrato di US sarà uguale al rettangolo KGL; e con ciò il quadrato di US sarà al quadrato di ST, come il rettangolo KGL allo stesso quadrato di ST, ovvero al quadrato della sua uguale GM. Ma a cagione de' triangoli simili UST, e pPT il quadrato di US sta al quadrato di ST, come il quadrato di pP al quadrato di PT, ossia per costruzione come N ad O. Dunque sarà pure il rettangolo KGL al quadrato di GM, come N ad O: e

quindi condotte dal punto G sulle AB , CD , ed EF le rette in paratesi GA , GC , e GE rispettivamente, sarà per lo lemma il rettangolo delle GA , e GC al quadrato di GE , come H ad I ; e perciò G è il punto richiesto, e ne tocca la descritta parabola YG .

In secondo luogo (*Fig. 24, e 25.*) la retta pT non sia parallela ad AB , ma l'incontri nel punto X , al di sotto, ovvero al disopra del punto P , vale a dire la ragione di QT a TP sia minore, ovvero maggiore della ragion sudduplicata di N ad O , in entrambi questi casi da' punti V , ed X si tirino sulla retta PT le VY , ed XZ parallele ad EF , che seghino le AB , e CD ne' punti v , ed x rispettivamente, e si ritrovi la Yy , che stia ad YZ , come il rettangolo delle Vv , ed Xx al quadrato della stessa YZ : indi se il punto X ne cada al di sotto del punto P (*Fig. 25.*), cioè la ragione di QT a TP sia minore della ragion sudduplicata di N ad O , in tal caso si descriva l'ellisse YGZ , di cui YZ ne sia il diametro, Yy il parametro, e le ordinate al diametro sieno parallele ad EF ; ed essa curva, com'è chiaro, si cambierà in un cerchio descritto intorno ad YZ come a suo diametro, se mai la YZ sia media proporzionale tra le rette Vv , ed Xx , e la PT sia perpendicolare alla EF , ovvero la PQ uguale alla PR . Che se poi il punto X ne cada al di sopra del punto P (*Fig. 25.*), ch'è quanto a dire la ragione di QT a TP sia maggiore della ragion sudduplicata

di N ad O, in tal caso co' medesimi dati si descrivano le iperboli opposte YG, e ZG. Si dimostrerà come sopra, che il rettangolo QTR, uguale al quadrato di TR metà di QR, stia ancora al rettangolo ZTY, come il rettangolo di Xx, e Vv al quadrato di ZY, cioè nella stessa ragione, che in dette curve il quadrato della semiordinata corrispondente all'ascissa YT sta al medesimo rettangolo ZTY, e però esse ne passeranno pe' punti Q, ed R. E perchè QT sta a Pp, come TR alla stessa Pp, e di queste due ragioni la prima n'è uguale, com'è chiaro, alla ragione di TX ad Xp, ovvero di TZ a ZP, e l'altra ne pareggia la ragione di TV a Vp, ovvero di Ty ad YP, sarà TZ a ZP, come Ty ad yP; e con ciò le AB, e CD toccheranno le mentovate sezioni Coniche ne' punti Q, ed R. (*p. 34 l. 1. Con. di Ap.*)

Ciò posto, nel perimetro delle dette curve prendasi ovunque il punto G, da cui si tirino rispettivamente sulle date rette AB, CD, ed EF le GK, e GL parallele ad EF, e la GM parallela alla PT. Questa retta, com'è chiaro, biseccherà la KL nel punto S, ove l'incontra, e sarà il quadrato di GS al rettangolo YSZ, come Yy ad YZ, ovvero per costruzione, come il rettangolo delle Vv, ed Xx al quadrato di YZ. Ma in questa ragione si è dimostrato dianzi essere ancora il rettangolo KUL al rettangolo sUt: dunque sarà puranche il quadrato di GS al rettangolo YSZ, o al suo uguale sUt, come il rettangolo KUL allo stesso rettangolo sUt: •

quindi sarà il quadrato di GS uguale al rettangolo KUL, e le differenze di ciascuno di essi, e del quadrato di KS saranno anche uguali tra di loro, vale a dire, sarà il rettangolo KGL uguale al quadrato di US; e con ciò sarà il rettangolo KGL al quadrato di GM, come il quadrato di US al quadrato della stessa GM, ovvero della sua uguale ST. Ma pe' triangoli simili UST e pPT il quadrato di US sta al quadrato di ST, come il quadrato di pP al quadrato di PT, ovvero per costruzione, come N ad O. Dunque sarà ancora il rettangolo KGL al quadrato di GM, come N ad O, ed intendendosi condotte dal punto G sulle AB, CD, ed EF le rette in paratesi GA, GC, e GF rispettivamente, sarà per lo lemma il rettangolo delle GA, e GC al quadrato di GE, come H ad I; e perciò G n'è il punto richiesto, e ne tocca le descritte curve. C. B. R.

LEMMA AL PORISMA SEGUENTE.

Sieno date di sito le quattro rette (*Fig. 26.*) AB, CD, EF, e GH, a cui dal punto I sieno tirate rispettivamente le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG per modo, che il rettangolo di due di queste rette, poniamo delle IA, ed IC, stia al rettangolo delle rimanenti IE, ed IG nella ragione delle date rette K, ed L; indi dallo stesso punto I si conducano sulle medesime rette AB, CD, EF, e GH le IM, IN, IO, ed IP, che

facciano con quelle anche angoli dati rispettivamente. Dico essere ancora il rettangolo MIN al rettangolo OIP in una data ragione. E viceversa, se in questa data ragione stia il rettangolo MIN al rettangolo OIP, intendendosi già condotte sulle AB, CD, EF, e GH rispettivamente le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG, dico essere benanche il rettangolo delle rette IA, ed IC al rettangolo delle rimanenti IE, ed IG, come K ad L.

Imperciocchè essendo dati per ipotesi gli angoli IAM, ed IMA del triangolo MIA, sarà data la ragione di MI ad IA, così pure essendo dati gli angoli INC, ed ICN del triangolo CIN sarà data la ragione di IN ad IC; e quindi sarà benanche data la ragione del rettangolo MIN al rettangolo AIC, che pongasi uguale alla ragione delle date rette Q, ed R. Similmente si dimostrerà essere il rettangolo EIG al rettangolo OIP in una data ragione, che facciasi uguale a quella delle date rette L, ed R. Adunque il rettangolo MIN essendo al rettangolo AIC, come Q a K, il rettangolo AIC al rettangolo EIG, come K ad L, ed il rettangolo EIG al rettangolo OIP, come L ad R, sarà per equalità ordinata il rettangolo MIN al rettangolo OIP, come Q ad R.

Viceversa, sia il rettangolo MIN al rettangolo CI, come Q ad R: dico essere ancora il rettangolo AIC al rettangolo EIG, come K ad L. Imperciocchè essendo per costruzione il rettan-

golo MIN al rettangolo AIC, come Q a K, sarà invertendo il rettangolo AIC al rettangolo MIN, come K a Q: ma è poi il rettangolo MIN al rettangolo OIP per ipotesi, come Q ad R, ed il rettangolo OIP sta al rettangolo EIG per costruzione, come R ad L. Dunque sarà per equalità ordinata il rettangolo AIC al rettangolo EIG, come K ad L. C. B. D.

PORISMA TERZO.

Date di sito quattro linee rette, trovare un punto, dal quale condotte sulle date linee rispettivamente quattro rette in paratesi, sia il rettangolo di due di queste rette al rettangolo delle rimanenti in una data ragione.

Sieno date di sito le quattro rette AB, CD, EF, e GH. Bisogna ritrovare il punto I, dal quale condotte in paratesi le IA, IC, IE, ed IG sulle date rette rispettivamente, sia il rettangolo di due delle rette in paratesi, poniamo delle IA, ed IC, al rettangolo delle rimanenti IE, ed IG nella data ragione di K ad L.

PROPOSIZIONE I.

Sieno tra loro parallele le date rette AB, CD, EF, e GH. (Fig. 27.). Bisogna ritrovare un punto, come si è detto dianzi.

Suppongasì essere I il punto richiesto, da cui si tirino sulle date rette le IM, IN, IO, ed IP parallele a qualunque data retta TS, che seghi le AB, CD, EF, e GH ne' punti T, V, U, ed X rispettivamente, sarà per l'anzidetto Lemma il rettangolo MIN al rettangolo OIP in una data ragione, che rinvergasi uguale a quella delle date rette Q, ed R. Ciò premesso, si tiri dal punto I sulla retta TX la IS parallela alle AB, CD, EF, e GH, sarà chiaro a cagione de' parallelogrammi IT, IV, IU, ed IX, che il rettangolo MIN sia uguale al rettangolo TSV, ed il rettangolo OIP uguale al rettangolo USX. Ma s'è dimostrato il rettangolo MIN al rettangolo OIP, come Q ad R: dunque in questa data ragione sarà pure il rettangolo TSV al rettangolo USX. Ma è data la retta TX, ed in essa sono dati i punti T, V, U, ed X. Dunque sarà ancora dato il punto S, e quindi la SI, in cui ne giace il punto I, è una retta data di sito.

Intanto il problema compongasì in questo modo.

Si tiri ovunque la retta TS, che seghi le date rette AB, CD, EF, e GH ne' punti T, V, U, ed X rispettivamente, e si esibisca, come si è detto, la ragione di Q ad R: indi nella data retta TX, ed in essa i dati punti T, V, U, ed X, si ritrovi il punto S per modo, che il ret-

tangolo TSV stia al rettangolo USX nella data ragione di Q ad R (1). Finalmente si tiri dal punto S la retta SI parallela alle AB, CD, EF, e GH, ed in essa si prenda un qualunque punto I, dal quale si conduca la retta MN parallela a TS, e che seghi le rette AB, CD, EF, e GH ne' punti M, N, O, e P rispettivamente. E poichè a cagione de' parallelogrammi IU, ed IX il rettangolo TSV è uguale al rettangolo MIN, ed il rettangolo USX è uguale al rettangolo OIP, e per costruzione il rettangolo TSV sta al rettangolo USX, come Q ad R, sarà ancora il rettangolo MIN al rettangolo OIP, come Q ad R: e quindi condotte dal punto I sulle AB, CD, EF e GH le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG rispettivamente, sarà benanche per lo lemma il rettangolo delle IA, ed IC al rettangolo delle IE, ed IG, come K ad L; e perciò I è il punto richiesto e ne tocca la retta IS parallela alle date rette AB, CD, EF, e GH.

C. B. R.

(1) Vedi Simpson *de Sectione determinata* lib. II.

PROPOSIZIONE II.

Sieno parallele le rette AB , e CD , su cui ne insistono i lati di uno de' rettangoli delle rette in paratesi, e le EF , e GH interseghino le AB , e CD ne' punti S , T , V , ed U rispettivamente. (*Fig. 28, e 29.*). Bisogna ritrovare quel punto, che si è proposto di sopra.

Suppongasi essere I il punto richiesto, da cui si tirino sulle rette AB , e CD le IM , ed IN parallele a GH , e sulle EF , e GH conducansi le rette IO , ed IP parallele ad AB , e CD , sarà per lo lemma il rettangolo MIN al rettangolo OIP in una data ragione, che rinvergasi uguale a quella delle date rette Q , ed R . Indi si tagli Pi uguale ad OI , sarà la Oi uguale alla PI , la retta data di sito XYZ , che ne biseca le date rette SU , e TV ne biseccherà ancora la Ii , ed il rettangolo OIP sarà uguale al rettangolo iPI . Ma il rettangolo MIN a cagione de' parallelogrammi IU , ed IV è uguale al rettangolo UPV . Dunque sarà pure il rettangolo iPI al rettangolo UPV nella data ragione di Q ad R . Per la qual cosa intendendosi descritta la curva conica $STiVU$, che abbia per sottese le SU , TV , ed iI , sarà XYZ un diametro di essa curva, ed il rettangolo de' segmenti di ciascuna di lei corda parallela ad SU , TV , ed iI sarà al' rettangolo de' corrispondenti segmenti della corda UV .

siccome il rettangolo iPI al rettangolo UPV , o sia nella data ragione di Q ad R : quindi dal punto X , ove il diametro XYZ ne incontra la curva, tirate sulle rette EF , e GH le Xo , ed Xp parallele ad AB , e CD , sarà oX uguale ad Xp , ed il quadrato di Xp al rettangolo UpV , siccome Q ad R . Ed essendo parallele le rette EF , e GH (*Fig. 28.*), sarà Xp uguale alla data retta VY , ed il rettangolo UpV , sarà uguale al rettangolo ZXY ; e perchè questo rettangolo serba al dato quadrato di Xp la data ragione di Q ad R , sarà anch'esso dato di grandezza, e con ciò sarà dato il punto X . Che se poi non sono parallele le rette EF , e GH , in tal caso la retta XYZ incontrerà, com'è chiaro, le rette EH , e GF in uno stesso punto h , che sarà dato di sito. E poichè il rettangolo ZXY sta al rettangolo UpV nella ragione del quadrato di ZY al quadrato di UV , che n'è data, ed il rettangolo UpV sta al quadrato di pX nella data ragione di Q ad R , ed il quadrato di pX sta al quadrato di Kh a cagione de' triangoli simili hXp , ed hXU , come il quadrato di UZ al quadrato di Zh , che l'è ancora una ragion data. Dunque sarà benanche data la ragione del rettangolo ZXY al quadrato di Xh : e con ciò sarà dato il punto X . Ma sono date di posizione, e di grandezza nella curva conica $STXVU$ le semior-
dinate VY , ed UZ , e le loro corrispondenti
ascisse XY , ed XZ . Dunque si potrà describe-

re, come dimostreremo nel lemma seguente, la predetta curva conica $STXVU$, in cui ne giace il punto I , ed essa sarà parabola, ellisse, ovvero iperbole, secondochè la ragione de' quadrati delle semiordinate VY , e UX sia uguale, minore, o maggiore di quella della loro ascisse XY , ed XZ .

Intanto il problema compongasi in questo modo,

Si ritrovi, come s'è detto, la ragione di Q ad R ; indi si biseghino le rette SU , e TV ne' punti Z , ed Y , e si congiunga la retta YZ , la quale se mai è parallela alle rette ST , ed UV , facciasi il rettangolo ZXY al quadrato di VY , come Q ad R (*Fig. 28.*): che se poi YZ non sia parallela alle rette ST , ed UV , ma l'incontri nell'istesso punto h (*Fig. 29.*), allora facciasi il quadrato di Uh al quadrato di UZ , come Q ad S ; ed essendo dati nella retta Zh i tre punti Z , Y , ed h vi si ritrovi il punto X , così che il rettangolo ZXY stia al quadrato di Xh , come S ad R . Finalmente per lo lemma, che siegue, si descriva la sezione conica $STXVU$, in cui sieno date di posizione, e di grandezza le ascisse XY , ed XZ , e le loro corrispondenti ordinate TV , ed SU , e vi si prenda ovunque nel perimetro il punto I , da cui si tirino sulle rette AB , e CD le IM , ed IN parallele a GH , e sulle EF , e GH condúcansi le IO , ed IP parallele alle AB , e CD , e la IO seghi la curva nel punto i . E poichè la retta

XZ biseca per costruzione le **TV**, ed **SU**, ne bisecherà ancora la **OP** ad esse parallela; e perchè la **XZ** è un diametro della sezione conica **STXVU** ne bisecherà parimente la retta **li**, ch'è ad esso ordinata: e però sarà **Oi** uguale ad **IP**, ed il rettangolo **OIP** sarà uguale al rettangolo **iPI**. Ma è poi il rettangolo **MIN** uguale al rettangolo **UPV** a cagione de' parallelogrammi **IU**, ed **IV**. Dunque sarà il rettangolo **MIN** al rettangolo **OIP**, siccome il rettangolo **UPV** al rettangolo **iPI**. Ma in questa ragione n'è ancora il rettangolo **UpV** al quadrato di **pX**. Dunque sarà pure il rettangolo **MIN** al rettangolo **OIP**, siccome il rettangolo **UpV** al quadrato di **pX**. Or, essendo la **GH** parallela ad **EF**, il rettangolo **UpV** del pari, che il suo uguale **ZXY** sta al quadrato di **pX**, come **Q** ad **R**. Dunque sarà ancora il rettangolo **MIN** al rettangolo **OIP**, come **Q** ad **R**. Che se poi le **GH**, ed **EF** non sieno parallele, ma s'incontrino insieme con la **XZ** nel punto **h** (*Fig. 29.*), in tal caso il rettangolo **UpV** sta al quadrato di **pX** in ragion composta del rettangolo **UpV** al rettangolo **ZXY** del rettangolo **ZXY** al quadrato di **Xh**, e del quadrato di **Xh** al quadrato di **pX**. Ma il rettangolo **UpV** sta al rettangolo **ZXY**, come il quadrato di **UV** al quadrato di **ZY**, ovvero come il quadrato di **Uh** al quadrato di **hZ**, ed il quadrato di **Xh** sta al quadrato di **pX**, come il quadrato di **Zh** al quadrato di **ZU** a cagione de' triangoli simili **hXp**, ed **hZU**. Dunque sarà

ancora il rettangolo UpV al quadrato di pX in ragion composta del quadrato di Uh al quadrato di hZ, del rettangolo ZXY al quadrato di Xh, e del quadrato di Zh al quadrato di ZU: ma di queste tre ragioni la prima, e la terza, come è chiaro, ne pareggiano la ragione del quadrato di Uh al quadrato di UZ, che per costruzione è uguale alla ragione di Q ad S, e l'altra ragione del rettangolo ZXY al quadrato di pX si è fatta uguale a quella di S ad R. Dunque sarà ancora il rettangolo UpV al quadrato di pX in ragion composta di Q ad S, e di S ad R, cioè, come Q ad R, e perciò in questa stessa ragione sarà pure il rettangolo MIN al rettangolo OIP. Laonde condotte dal punto I sulle AB, CD, EF, e GH le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG rispettivamente, sarà per lo Lemma il rettangolo di IA, e di IC al rettangolo delle IE, ed IG nella data ragione di K ad L; e perciò I è il punto richiesto, e ne tocca la descritta curva STXVU. C. B. R.

L E M M A.

Descrivere quella Sezione conica, in cui sieno date di posizione, e di grandezza le ascisse XY, ed XZ, e le loro corrispondenti semiordinate YV, e ZU.

Da' punti X, Y, e Z s'innalzino le XF, YG, e ZH perpendicolari ad XZ, e si faccia la YG terza proporzionale in ordine alle XY, ed YV,

e la ZH terza proporzionale in ordine alle XZ e ZU, e si congiunga la retta HG, che seghi nel punto F la perpendicolare XF; indi, se mai la retta FH sia parallela ad XZ (*Fig. 30.*), in tal caso si descriva la parabola UVX, di cui XZ ne sia il diametro, XF il parametro, e le ordinate ad esso diametro sieno parallele alle date rette YV, e ZU. Che se poi la retta HF non sia parallela ad XZ, ma l'incontri nel punto I al di sopra, ovvero al di sotto del punto X, nel primo caso si descriva l'iperbole UVX (*Fig. 31.*), che abbia XI per lato trasverso, ed XF per lato retto, e le semiordinate ad esso diametro sieno parallele alle date rette YV, e ZU: nel secondo caso co' medesimi lati si descriva l'ellisse XVU (*Fig. 32.*), la quale si cambierà in un cerchio, se mai sia la IX uguale ad XF, e le YV, e ZU sieno perpendicolari ad XZ. E poichè la FH è la regolatrice della descritta curva, sarà la semiordinata al diametro XZ corrispondente alla ascissa XY, media proporzionale tra le rette XY, ed YG. Ma anche la data retta YV è per costruzione media proporzionale tra le medesime rette XY, ed YG, ed è parallela a detta semiordinata. Dunque questa ne coincide colla YV. Similmente si dimostrerà, che la semiordinata al diametro XZ corrispondente alla ascissa XZ, ne coincide colla data retta ZU. Adunque si è descritta la curva conica XVU, in cui sono date di posizione, e di grandezza le ascisse

XY, ed XZ, e le loro corrispondenti semiordinate YV, e ZU. C. B. F.

S C O L I O.

La composizione di questo problema è ben differente da quella indicatane dal Cavalier Newton ne'suoi principj Matematici (1). Dappoichè volendo descrivere la sezione conica, che passi per gli angoli del quadrilatero formato dalle quattro rette date di sito, ei non rapporta la curva a quel diametro, che ne biseca i lati paralleli, come sarebbe più naturale, ma sì bene a quel diametro, che si conduce per un angolo del detto quadrilatero; di maniera che per determinarne la posizione dee tirare da due angoli di questa figura due rette tra loro parallele, una che sia tangente della curva, e l'altra una di lei corda; affinchè per tal modo unendo il contatto di quella, ed il punto medio di questa, ne ottenga il diametro richiesto, di cui per altro prima di ritrovarne il lato retto, deve anche determinarne la grandezza nel caso, che la curva in quistione sia un'ellisse, ovvero un'iperbole. Le quali cose a volerle tradurre in una sintesi rigorosa, portano in vero un involuppo non piccolo, e con ispecialità quella tangente, per cui il valentuomo dee adoperarvi il suo metodo delle prime, ed ultime ragioni, contaminando

(1) Vedi Newton *Principj Matem. Lib. 1. Lemma XIX Cor. 2.*

per così dire la purità delle dimostrazioni geometriche coll' idea degli infinitamente piccioli, ossia delle quantità evanescenti, da cui furono alieni mai sempre i Geometri antichi. Pare adunque, che il Newton in questa parte non avesse divinata la mente di que' sommi Geometri, non avendone indicate le loro vie dimostrative, che senza dubbio esser doveano le più semplici, e le più naturali. Ma egli, come ho detto altrove (*Parte 1. §. 26.*), nè tampoco si avvide del fine sublimissimo, che si avean proposto que' vetusti Geometri in questa specie di problemi del luogo a tre, ed a quattro linee, e forse per tal ragione ei non si mosse a ricercare minutamente, ed a stabilire tutt' i casi di questo luogo sì preclaro, limitandosi a quello solo, in cui le quattro rette date di sito formano tra loro un quadrilatero. E siccome il Newton ebbe ad impiegare a tal' uopo il suo metodo delle prime, ed ultime ragioni, ch' era affatto ignoto agli Antichi, così parmi, che da questo ei vieppiù si confermasse nell' idea del Cartesio; cioè, che gli antichi Geometri non avessero compiutamente risoluto il problema delle quattro rette (1), o sia il luogo a quattro linee enunciatone da Pappo (*Parte 1. §. 20.*). Laonde il Geometra Inglese per dimostrare l'attività del

(1) Vedi la Geometria del Cartesio pag. 8. Edizione di Amsterdam anno 1659.

suo nuovo metodo, anzichè l'utilità dell'argomento, volle di quel problema indicare in un corollario non già il calcolo, come fatto avea il Cartesio, ma bensì la composizione geometrica soggiungendone in fine queste significanti parole « *Atque ita problematis Veterum de quatuor lineis ab Euclide incepti, atque ab Apollonio continuati non calculus, sed compositio Geometrica, qualem Veteres quaerebant, in hoc corollario exhibetur* »; ove asserendo il Newton, che gli Antichi cercavano questa composizione geometrica, mostra egli di credere col Cartesio, che non l'avessero quelli ottenuta compiutamente: e dicendo *non calculus, sed compositio geometrica* con queste semplici, ma gravissime parole pare, ch'ei voglia riprendere modestamente il Geometra Francese, il quale non diè un gran passo in ridurre in equazione il problema delle quattro rette, essendo questo una conseguenza immediata dell'applicazione, ch'ei vi fece dell'Algebra, ma tutto l'affare in detto problema non meno, che in tutti gli altri, che la Geometria ne offre, consiste non già nel farne il calcolo, ma bensì nel recarne la debita composizione. E però queste parole veramente degne del gran Newton si dovrebbero spesso ripetere a' moderni Analisti, i quali dimentichì affatto della natura de' Geometrici problemi si appagano solo di ridurli ad una equazione qualunque senza più fare.

PROPOSIZIONE III.

Non sieno parallele le rette, su cui ne insistono i lati di ciascuno de' rettangoli delle rette in paratesi, cioè le AB, e CD, le EF, e GH; ma formino tra loro il quadrilatero STVU, ovvero tre di esse, poniamo le CD, EF, e GH si uniscano nello stesso punto V (*Fig. 33, e 34*). Bisogna ritrovare un punto, che abbia le condizioni esposte nel porisma.

Suppongasi essere I il punto richiesto, da cui si tirino sulle rette AB, e CD le IM, ed IN parallele a GH, e sulle EF, e GH le IO, ed IP parallele ad AB, sarà per lo lemma antiprecedente il rettangolo MIN al rettangolo OIP in una data ragione, che rinvergasi uguale a quella delle date rette Q, ed R: indi dal punto S si tiri la retta SX parallela alle rette MI, e GH, che sarà benanche data di sito, e ne incontri la retta PI nel punto X, sarà data la ragione di SX, ovvero della sua uguale MI ad XO a cagione del triangolo SXO dato di specie. Adunque presa la NY lungo la retta NIM per modo, che il rettangolo di MI, ed NY stia al rettangolo di OX, ed IP nella data ragione di Q ad R, ne sarà data benanche la ragione di NY ad IP (*pr. 68. de' dati*), o alla sua uguale NZ, intendendosi compito il parallelogrammo IZ; ma è data ancora la ragione di NZ ad NV per essere dato di specie il triangolo NZV. Dunque sarà anche data la ragione di NY, ad NV; e perchè n' è dato l'angolo VNY com-

preso dalle rette NY, ed NV, congiunta la VY ne sarà anche dato di magnitudine l'angolo NVY, e per esserne dato il punto V la VY sarà data di sito. Ciò premesso, essendo il rettangolo MIN al rettangolo OIP, come Q ad R, ovvero per costruzione, come il rettangolo di MI, ed NY al rettangolo di OX, ed IP, sarà il rettangolo di MI, ed NY al rettangolo di OX, ed IP, siccome il rettangolo MIN al rettangolo OIP; e con ciò sarà il rettangolo MIY al rettangolo XIP anche nella data ragione di Q ad R. Ma sono parallele le date rette GH, ed SX, su cui ne insistono i lati XI, ed IP del rettangolo XIP. Dunque per la precedente si troverà il luogo del punto I essere una data sezione conica.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si ritrovi, come si è detto, la ragione di Q ad R, e dal punto S tirata la SX parallela a GH, vi si tagli la Sa uguale a Q, e dal punto U si prenda sulla AB la Ub uguale ad R: indi da' punti a, e b si tirino sulle EF, e CD la ac parallela ad AB, e la bd parallela a GH, e prodotta la bd finchè la parte prodotta de ne pareggi la ca, si unisca la eV. E poichè sono date di sito le quattro rette AB, SX, GH, ed eV, delle quali le rette SX, e GH sono tra loro parallele, si ritrovi per la precedente quella sezione conica, nel di cui perimetro preso ad arbitrio il punto I, e da questo tirate sulle AB, ed eV le IM, ed IY paral-

lele a GH, e sulle SX, e GH le IX, ed IP parallele ad AB, sia il rettangolo MIY al rettangolo XIP, come Q ad R, e si compiano i parallelogrammi FINZ, e dePf. Ciò posto, il rettangolo di MI, ed NY sta al rettangolo di XO, ed IP in ragion composta di MI ad XO, e di NY ad IP. Ma pe' triangoli simili SXO, ed Sac SX, o la sua uguale Mr sta ad XO, siccome Sa ad ac; e per gli altri triangoli simili NVY, e dVe, NVZ, e dVf, essendo NY ad NV, come de a dV, ed NV ad NZ, siccome dV a df, sarà per equalità ordinata NY ad NZ, o alla sua uguale IP, come de a df, ovvero prendendo le di loro uguali, come ac ad Ub. Dunque sarà il rettangolo di MI, ed NY al rettangolo di XO, ed IP, siccome Sa ad Ub (23. *El. VI.*), ovvero come Q ad R; ma in questa ragione sta pure il rettangolo MIY al rettangolo XIP. Dunque sarà ancora il rettangolo di MI, ed NY al rettangolo di XO, ed IP, siccome il rettangolo MIY al rettangolo XIP; e con ciò sarà il rettangolo MIN al rettangolo OIP, come Q ad R. Laonde intendendosi tirate dal punto I sulle AB, CD, EF, e GH le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG rispettivamente, sarà ancora per lo lemma antiprecedente il rettangolo delle IA, ed IC al rettangolo delle IE, ed IG, come K ad L: e perciò I è il punto richiesto, e ne tocca la descritta sezione conica. C. B. R.

PROPOSIZIONE IV.

Le date rette AB, CD, EF, e GH si uniscano nello stesso punto S (*Fig. 35.*). Bisogna ritrovare quel punto, che si è proposto nel porisma.

Suppongasi essere I il punto richiesto, da cui si tirino sulle date rette AB, e CD le IM, ed IN parallele ad EF, e sulle EF, e GH le IO, ed IP parallele ad AB, sarà per lo lemma antiprecedente il rettangolo MIN al rettangolo OIP in una data ragione, che rinvenngasi uguale a quella delle date rette Q, ed R. E poichè il triangolo SOP è dato di specie, sarà data la ragione di SO, ovvero della sua uguale MI ad OP, e perciò presa la NT lungo la NM per modo, che il rettangolo di MI, ed NT stia al rettangolo POI nella data ragione di Q ad R, ne sarà data benanche (*pr. 68. de'dati*) la ragione di NT ad IO, o alla sua uguale NV, intendendosi compiuto il parallelogrammo IV. Ma è data ancora la ragione di NV ad NS per essere dato di specie il triangolo NSV. Dunque sarà data ancora la ragione di NT ad NS, e perchè n'è dato l'angolo SNT compreso dalle rette NS, ed NT, congiunta la ST, sarà dato anche di magnitudine l'angolo NST, e per esserne dato il punto S la ST sarà data di sito. Ciò posto, essendo il rettangolo MIN al rettangolo OIP, come Q ad R, ovvero per costruzione, come il rettangolo di MI,

ed NT al rettangolo POI, sarà (19. *El. V.*) il rettangolo MIT al quadrato della O, come Q ad R. Ma sono date di sito le tre rette AB, ST, ed EF, che si uniscono nello stesso punto S. Dunque per la proposizione quarta del secondo porisma il punto I ne toccherà una data retta.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si ritrovi, come si è detto, la ragione di Q ad R, e dal punto S prendasi nella retta EF la SU uguale a Q, e nella retta AB la SX uguale ad R: indi da' punti X, ed U si conducano rispettivamente sulle rette CD, e GH la XZ parallela ad EF, e la UY parallela ad AB, e tolta lungo la retta ZX la Zs uguale ad UY, si congiunga la Ss, che si prolunghi quanto si voglia. Finalmente essendo date di sito le rette AB, Ss, ed EF, che s'intersecano nello stesso punto S, conducasi per la proposizione quarta del secondo porisma quella linea retta nella quale preso ad arbitrio il punto I, e da questo tirate sulle AB, ed Ss le IM, ed IT parallele ad EF, e sulla EF la IO parallela ad AB, stia il rettangolo MIT al quadrato della IO nella data ragione di Q ad R, e le IT, ed IO incontrino le CD, e GH ne' punti N, e P rispettivamente. Ciò posto, il rettangolo di MI, e TN sta al rettangolo POI in ragion composta di MI ad OP, e di TN ad IO. Ma pe' triangoli simili SPO, ed SUY SÒ, o la sua uguale

MI sta ad OP, siccome SU ad UY, ovvero alla sua uguale sZ; e per gli altri triangoli simili TSN, ed sSZ, NSU, ed SZX, essendo TN ad NS, come sZ ad SZ, ed NS ad NV, o alla sua uguale IO, come SZ ad SX, sarà per equalità ordinata TN ad IO, come sZ ad SX. Adunque sarà il rettangolo di MI, e TN al rettangolo POI in ragion composta di SU ad UY, e di sZ ad SX, cioè per essere sZ uguale ad UY, come SU ad SX, ovvero per costruzione, come Q ad R. Ma in questa ragione l'è ancora il rettangolo MIT al quadrato di IO. Dunque sarà pure il rettangolo di MI, e TN al rettangolo POI, come il rettangolo MIT al quadrato di IO: e quindi sarà il rettangolo MIN al rettangolo OIP, come Q ad R (12. El. V.), ed intendendosi condotte dal punto I sulle date rette AB, CD, EF, e GH le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG rispettivamente, sarà ancora il rettangolo delle IA, ed IC al rettangolo delle IE, ed IG, come K ad L; e perciò I è il punto richiesto, e ne tocca la divisata retta C. B. R.

PROPOSIZIONE V.

Sieno parallele le tre rette AB, CD, ed EF, e la GH le interseghi ne' punti S, T, e V rispettivamente (Fig. 36.). Bisogna ritrovare quel punto, che si è proposto di sopra.

Suppongasi essere I il punto richiesto, da cui

si tirino sulle AB, CD, ed EF le rette IM, IN ed IO parallele a GH, e sulla GH la IP parallela alle AB, CD, ed EF, sarà per lo lemma antiprecedente il rettangolo MIN al rettangolo OIP in una data ragione, chè rinvenngasi uguale a quella delle date rette Q, ed R: indi presa la NU lungo la retta NI, per modo che stia alla IP, e alla sua uguale NT nella data ragione di Q ad R, ed unita la TU, n'emergerà il triangolo NTU dato di specie, e per esservi dato di magnitudine l'angolo NTU, e dato il punto T sarà la TU data di sito: ma NU è ad IP, come il rettangolo di MI, ed NU al rettangolo della stessa MI, ed IP (*I. El. VI.*), e nella ragione di NU ad IP, ossia di Q ad R l'è ancora il rettangolo MIN al rettangolo OIP. Dunque sarà pure il rettangolo di MI, ed NU al rettangolo di MI, ed IP, siccome il rettangolo MIN al rettangolo OIP; e con ciò (*19. El. V.*) sarà il rettangolo MIU al rettangolo di MO, ed IP, come il rettangolo MIN al rettangolo OIP, ossia nella data ragione di Q ad R. Ma sono date di sito le rette AB, TU, e GH, che formano, com'è chiaro, un triangolo tra di loro, e la MO è data di grandezza. Dunque per la proposizione quinta del primo porisma il punto I ne toccherà una data iperbole.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si ritrovi, come si è detto, la ragione di Q ad R, e dal punto T si prenda sulla retta CD la TX uguale ad R, e dal punto X si tiri la XY parallela a GH, ed uguale a Q: indi si congiunga la YT, la quale si prolunghi indefinitamente. E perchè sono date di sito le rette AB, YT, e GH, che segansi tra loro scambievolmente, si descrivano per la proposizione quinta del primo Porisma quelle iperboli opposte, nel di cui perimetro preso ad arbitrio il punto I, e tirate da esso sulle AB, ed YT le IM, ed IU parallele a GH, e sulla GH la IP parallela ad AB, sia il rettangolo MIU al rettangolo della IP, e della data retta SV nella data ragione di Q ad R. E poichè per costruzione Q sta ad R, come la XY alla XT, ossia pe' triangoli simili NUT, ed XTY, come NU ad NT, o alla sua uguale IP, sarà ancora il rettangolo MIU al rettangolo di SV, o della sua uguale MO, ed IP, come NU ad NT. Ma è poi NU ad NT, o alla sua uguale IP, come il rettangolo di MI, ed NU al rettangolo della stessa MI, ed IP. Dunque sarà pure il rettangolo MIU al rettangolo di MO, ed IP, siccome il rettangolo di MI, ed NU al rettangolo di MI, ed IP. E perciò sarà (19. El. V.) il rettangolo MIN al rettangolo OIP, come il rettangolo MIU al rettangolo di MO, ed IP, ossia nella data ra-

gione di Q ad R. Quindi condotte dal punto I sulle AB, CD, EF, e GH le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG rispettivamente, sarà ancora il rettangolo delle IA, ed IC al rettangolo delle IE, ed IG, come K ad L; e perciò I è il punto richiesto, e ne tocca le divise iperboli C. B. R.

PROPOSIZIONE VI.

Sieno parallele due delle date rette, poniamo le AB, e GH, su cui ne insistono i due lati IA, ed IG de' rettangoli AIC, ed EIG delle rette in paratesi, e le CD, ed EF interseghino le AB, e GH ne' dati punti S, T, V, ed U rispettivamente, e sieno in primo luogo tra loro parallele (*Fig. 37.*). Bisogna ritrovare un punto, che abbia le condizioni esposte nel porisma.

Suppongasi essere I il punto richiesto, da cui si tirino sulle date rette AB, e GH le IM, ed IP parallele alle rette CD, ed EF, e sulle CD, ed EF si conducano le IN, ed IO parallele alle date rette AB, e GH, sarà per lo lemma antiprecedente il rettangolo MIN al rettangolo OIP in una data ragione, che rinvergasi uguale a quelle delle date rette Q, ed R. Ciò posto, se mai la ragione di Q ad R sia di uguaglianza, in tal caso essendo il rettangolo MIN uguale al rettangolo OIP, sarà ancora il parallelogrammo MN uguale al parallelogrammo OP (23. *El. VI.*); e quindi sarà MI ad IO, come IP ad IN, ed i paral-

parallelogrammi MO, e PN giaceranno intorno alla medesima diagonale UTI. Ma sono dati i punti U, e T. Dunque la UTI, in cui ne giace il punto I, sarà una retta data di sito (*prop. 26. de' dati*). Che se poi non sia di uguaglianza la ragione di Q ad R, ma una di queste rette, poniamo la Q, sia maggiore di R, in tal caso essendo il rettangolo MIN al rettangolo OIP, come Q ad R, sarà ancora in questa medesima ragione il parallelogrammo MN al parallelogrammo OP; e quindi il parallelogrammo MN sarà anche maggiore del parallelogrammo OP. Ciò premesso, prendansi nella TH le TX, ed XV nella data ragione di Q ad R. E perchè il parallelogrammo MN sta al parallelogrammo OP, come Q ad R, ovvero, come TX ad XV, sarà, dividendo, l'eccesso del parallelogrammo MN sul parallelogrammo PO, ossia l'eccesso del parallelogrammo MT sul parallelogrammo TO al parallelogrammo PO nella data ragione di TV a VX. Similmente presa lungo la retta TC la TY, a cui la data retta TS serbi la ragione data di TV a VX, e compit' i parallelogrammi OX, e TZ, sarà chiaro essere il parallelogrammo TM al parallelogrammo TZ, come TV a VX, ovvero come il parallelogrammo TO al parallelogrammo OX, e quindi avremo (*19. El. V.*) l'eccesso del parallelogrammo MT sul parallelogrammo TO all'eccesso del parallelogrammo TZ sul parallelogrammo OX, come TV a VX, ovvero come

lo stesso eccesso del parallelogrammo MT sul parallelogrammo TO al parallelogrammo PO; e perciò questo parallelogrammo IO ne pareggerà l'eccesso del parallelogrammo TZ sul parallelogrammo OX, ed il solo parallelogrammo TZ ne pareggerà i parallelogrammi PO, ed OX pres'insieme, ossia tutto il parallelogrammo IX. Per la qual cosa il rettangolo di PT, o delle sua uguale IN, e della data retta TY ne pareggerà ancora il rettangolo delle rette IX, ed IP. Ma sono date di sito le rette Xx, GH, e CD, delle quali la CD è parallela alla Xx, e la GH le intersega ne' punti T, ed X. Dunque per la proposizione quarta del primo porisma il punto I ne toccherà una data iperbole.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si ritrovi, come si è detto, la ragione di Q ad R, ed essendo questa ragione di uguaglianza, si tiri la diagonale UI del parallelogrammo SUVT, e da qualunque punto I preso in essa si conducano rispettivamente sulle AB, e GH le IM, ed IP parallele a CD, ed EF, e sulle medesime CD, ed EF le IN, ed IO parallele alle AB, e GH. E poichè il parallelogrammo MT è uguale al parallelogrammo TO avvegnacchè complementi de' parallelogrammi PN, ed SV, che sono sotto la diagonale UTI, aggiuntovi di comune il parallelogrammo PN, sarà tutto il parallelogrammo MN

uguale a tutto il parallelogrammo PO; e quindi il rettangolo MIN sarà ancora uguale al rettangolo OIP: laonde intendendosi tirate dal punto I sulle date rette AB, CD, EF, e GH le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG rispettivamente, sarà benanche il rettangolo AIC al rettangolo EIG, come K ad L; e perciò I è il punto richiesto, e ne tocca la data retta UT.

Che se poi non sia di uguaglianza la ragione di Q ad R, ma una di queste rette, poniamo la Q, sia maggiore di R, in tal caso prendansi lungo la retta TH le TX, e VX nella ragione di Q ad R, e lungo la TC prendasi la TY, a cui la TS serbi la ragione di TV a VX, e da' punti X, ed Y si tirino rispettivamente la Xx parallela a CD, ed EF, e la YZ parallela ad AB, e GH; indi, essendo date di sito le rette Xx, GH, e CD, delle quali le Xx, e GH s'interseghino nel punto X, e la CD è parallela alla Xx, si descriva per la proposizione quarta del primo porisma quell'iperbole conica, nel di cui perimetro preso ad arbitrio il punto I, e da esso tirate sulle Xx, e GH le IX, ed IG parallele rispettivamente alle date rette GH, ed Xx, e sulla CD la IN parallela alla data retta GH, sia il rettangolo XIP uguale al rettangolo della IN, e della data retta TY. E perchè il parallelogrammo IX^a sta al parallelogrammo TZ (23. El. VI.), siccome il rettangolo XIP al rettangolo della PT, o della sua uguale IN, e della TY, sarà ancora il paralle-

logrammo IX uguale al parallelogrammo TZ ,
 e toltono di comune il parallelogrammo OX , sarà
 l' eccesso del parallelogrammo TZ sul parallelo-
 grammo OX uguale al parallelogrammo PO. Ma
 essendo per costruzione TS a TY , come TV a
 VX, sarà benanche il parallelogrammo TM al pa-
 rallelogrammo TZ, come il parallelogrammo TO
 al parallelogrammo OX ; e per la 19. El. V. sarà
 l' eccesso del parallelogrammo TM sul parallelo-
 grammo TO all' eccesso del parallelogrammo TZ
 sul parallelogrammo OX, come TV a VX. Ma
 l' eccesso del parallelogrammo TM sul parallelo-
 grammo TO è uguale all' eccesso del parallelogram-
 mo MN sul parallelogrammo PO , e l' eccesso del
 parallelogrammo TZ sul parallelogrammo OX dianzi
 si è mostrato uguale al parallelogrammo PO. Dun-
 que sarà benanche l' eccesso del parallelogrammo
 MN sul parallelogrammo PO allo stesso parallelo-
 grammo PO , come TV a VX, e componendo, sarà
 il parallelogrammo MN al parallelogrammo PO,
 come TX ad XV. Ma il parallelogrammo MN sta
 al parallelogrammo PO, come il rettangolo MIN
 al rettangolo OIP, e per costruzione TX sta ad
 XV, come Q ad R. Dunque sarà ancora il rettan-
 golo MIN al rettangolo OIP, come Q ad R ; ed
 intendendosi tirate dal punto I sulle date rette
 AB, CD, EF, e GH le rette in paratesi IA ,
 IC, IE, ed IG rispettivamente, sarà per lo lemma
 il rettangolo AIC al rettangolo EIG, come K ad
 L; e perciò I è il punto richiesto, e ne tocca la
 descritta iperbole. C. B. R.

PROPOSIZIONE VII.

In secondo luogo le rette CD , ed EF non sieno parallele, ma s' incontrino nel punto X (*Fig. 39.*). Bisogna ritrovare quel punto, che si è detto dianzi.

Suppongasi essere I il punto richiesto, da cui si tirino sulle AB , CD , e GH le IM , IN , ed IP parallele ad EF , e sulla EF si conduca la IO parallela ad AB , e GH , sarà per lo lemma anti-precedente il rettangolo MIN al rettangolo OIP in una data ragione, che rinvergasi uguale a quella delle date rette Q , ed R ; indi si prenda la NY lungo la retta NI per modo, che stiane alla IO nella data ragione di Q ad R ; e perchè n'è data la ragione di NY ad IO , o alla sua uguale NZ intendendosi compito il parallelogrammo IX , come ancora n'è data la ragione di NZ ad NX a cagione del triangolo NXZ dato di specie, ne sarà anche data la ragione di NY ad NX . Ma è dato l'angolo YNX compreso dalle rette YN , ed NX . Adunque unita la retta XY sarà dato di magnitudine l'angolo NXY , e per esserne dato il punto X la retta XY sarà data di sito. Ma NY è ad IO , come il rettangolo di MI , ed NY al rettangolo della stessa MI , ed IO (*I. El. VI.*), e nella ragione di NY ad IO , ossia di Q ad R l'è ancora il rettangolo MIN al rettangolo OIP . Dunque sarà pure il rettangolo di MI , ed NY al rettangolo di MI , ed IO , come il rettangolo MIN al

rettangolo OIP; e quindi sarà (19. *El. V.*) il rettangolo MIY al rettangolo di MP, ed IO, come il rettangolo MIN al rettangolo OIP, ossia nella data ragione di Q ad R. Ma la MP, com'è chiaro, è data di magnitudine, e sono date di sito le rette AB, XY, ed EF, che si uniscono in un solo punto, ovvero formano tra loro un triangolo. Dunque per la proposizione quarta, ovvero quinta del primo porisma il punto I ne toccherà una data iperbole.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si ritrovi, come si è detto, la ragione di Q ad R, e si tiri dal punto X la Xa parallela alle AB, e GH, ed uguale ad R; indi dal punto a conducasi la ab parallela ad EF, che ne incontri la CD nel punto b, e si prolunghi finchè la parte protratta bc ne pareggi la data retta Q, e si congiunga la cX, che producasi indefinitamente. E perchè sono date di sito le rette AB, cX, ed EF, che si uniscono in un solo punto, ovvero formano tra loro un triangolo, si descriva per la proposizione quarta, o quinta del primo porisma quella iperbole conica, nel di cui perimetro preso ad arbitrio il punto I, e tirate da esso sulle AB, e cX le IM, ed IY parallele ad EF, e sulla EF la IO parallela ad AB, e GH, stia il rettangolo MIY al rettangolo della IO, e della data retta UV, siccome Q ad R. Ciò posto,

essendo pe' triangoli simili YNX , e cbX , NXZ ,
ed Xab , NY ad NX , come cb a bX , ed NX ad NZ ,
come bX ad Xa , sarà per equalità ordinata NY
ad NZ , o alla sua uguale IO , come cb ad Xa ,
cioè prendendo le loro uguali, come Q ad R .
Ma NY sta ad IO , come il rettangolo di MI ,
ed NY al rettangolo della stessa MI , ed IO ;
e per costruzione Q sta ad R , come il ret-
tangolo MIY al rettangolo di IO , ed UV .
Dunque sarà il rettangolo di MI , ed NY al
rettangolo di MI , ed IO , siccome il rettangolo
 MIY al rettangolo di UV , o della sua uguale MP , e
di IO : quindi (19. *El. V.*) sarà il rettangolo MIN al
rettangolo OIP , come il rettangolo di MI , ed NY
al rettangolo di MI , ed IO , ossia nella data ra-
gione di Q ad R . Laonde intendendosi tirate dal
punto I sulle AB , CD , EF , e GH le rette in
paratesi IA , IC , IE , ed IG , sarà per lo lemma
antiprecedente il rettangolo AIC al rettangolo
 EIG nella ragion data di K ad L ; e perciò I è
il punto richiesto, e ne tocca la descritta iper-
bole. C. B. R.

S C O L I O.

Ne' tre precedenti porismi sembrami, se mal non
mi appongo, di aver dimostrato a pieno il luogo a
tre, ed a quattro linee indicatone per avventura da
Pappo Alessandrino. Or altro non mi resta per
compiere un' argomento di tanta importanza nell'

analisi, senonchè ne' tre porismi, che sieguono, andar rintracciando i luoghi, che toccherà il punto in quistione, allorchè ad. uno de' divisati spazii delle rette in paratesi si aggiunga uno spazio dato, ovvero da' esso vi si tolga, affinchè ei per tal modo ne serbi all'altro una ragion data, ovvero secondo il linguaggio degli Antichi, allorchè uno de' detti spazii delle rette in paratesi sia minore, o maggiore dell' altro in quanto ad una ragion data. Così ho potuto alla meglio rendere in nostra lingua queste due espressioni δοθέντι μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ, e δοθέντι ἐλασσον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ, che adopera Euclide nelle definizioni undecima, e duodecima del libro de' dati, e che il Commandini letteralmente tradusse latino, in dicendo *major est data quam in ratione, e minor est data quam in ratione*: ove è da notarsi, che in questo luogo ho dovuto prendere in un senso più esteso quella definizione undecima di Euclide. Imperciocchè Egli allora dice, che una grandezza sia maggiore di un'altra in quanto ad una ragion data; quando toltane da essa la grandezza data, il residuo ne serbi all'altra la data ragione, vale a dire la data grandezza supponesi da Euclide minore della grandezza, da cui si toglie, mentre può darsi, che questa siane minore di quella, come si vedrà ne' porismi, che sieguono; e però volendo universalizzare la detta definizione, dovremo modificarla nel seguente modo: Cioè, *una grandezza, si dirà essere maggiore di*

un'altra in quanto ad una ragion data, quando la differenza di essa, e della grandezza data ne serbi all'altra la data ragione.

PROPOSIZIONE QUARTA.

Date di sito tre linee rette, ritrovare un punto, da cui tirate sulle date linee tre rette in paratesi, il rettangolo di due di queste rette sia minore, o maggiore del rettangolo della rimanente, e di una data retta in quanto ad una data ragione.

Sieno AB, CD, ed EF le rette date, di sito (*Fig. 40, 41, e 42.*). Bisogna ritrovare un punto, da cui tirate sulle AB, CD, ed EF tre rette in paratesi, il rettangolo di due di queste rette, poniamo di quelle condotte sulle AB, e CD sia minore, o maggiore del rettangolo della rimanente, e della data retta H in quanto alla data ragione di I a K, ed il quadrato della retta L siane la data grandezza per modo, che il rettangolo delle rette in paratesi condotte sulle AB, e CD, ed il quadrato della retta L pres' insieme, ovvero la loro differenza stia al rettangolo della retta in paratesi condotta sulla EF, e della data retta H, siccome I a K.

Suppongasi essere G il punto richiesto, da cui tirate sulle AB, CD, ed EF le rette in paratesi GA, GC, e GE, sia in primo luogo (*Fig. 40.*) il rettangolo AGC minore del rettangolo HGE in quanto alla data ragione di I a K, sarà il ret-

tangolo AGC insieme col quadrato della retta L al rettangolo HGE, come I a K, ovvero come il quadrato della retta L al quadrato della retta M, intendendosi la ragione di queste date rette essere uguale a quella di I a K; quindi avremo (19. *El. V.*) il rettangolo AGC all' eccesso del rettangolo HGE sul quadrato di M, come il quadrato di L al quadrato di M, ovvero come I a K. Laonde presa sulla retta EG la retta EN per modo, che il rettangolo HEN sia uguale al dato quadrato di M, sarà la EN data di grandezza, e l' estremo N, com' è chiaro, ne toccherà la retta data di sito NO parallela ad EF, e l' eccesso del rettangolo HGE sul quadrato di M sarà uguale al rettangolo HGN. Ma si è dimostrato il rettangolo AGC all' eccesso del rettangolo HGE sul quadrato di M, come I a K. Dunque sarà ancora il rettangolo AGC al rettangolo HGN, come I a K; e perciò il punto G ne toccherà per lo porisma primo una data sezione conica.

In secondo luogo (*Fig. 41.*) il rettangolo AGC sia maggiore del rettangolo HGE in quanto alla data ragione di I a K, e sia primieramente il rettangolo AGC maggiore del quadrato della retta L, sarà in tal caso l' eccesso del rettangolo AGC sul quadrato della retta L al rettangolo HGE, siccome I a K, ossia come il quadrato della retta L al quadrato della retta M; quindi sarà (12. *El. V.*) il rettangolo AGC al rettangolo HGE insieme col quadrato della retta M, siccome

il quadrato di L al quadrato di M , ovvero come I a K . Laonde aggiunta per dritto alla GE la EN per modo, che il rettangolo HEN sia uguale al quadrato della data retta M , sarà la EN data di grandezza, e l'estremo N ne toccherà la retta data di sito NO parallela ad EF , e l rettangolo HGE insieme col quadrato della retta M sarà uguale a tutto il rettangolo HGN . Ma si è dimostrato essere il rettangolo AGC al rettangolo HGE insieme col quadrato della retta M , come I a K . Dunque sarà ancora il rettangolo AGC al rettangolo HGN , siccome I a K ; e perciò il punto G ne toccherà per lo porisma primo una data sezione conica. Che se poi il quadrato della retta L sia maggiore del rettangolo AGC (*Fig. 42.*), allora sarà il difetto del rettangolo AGC dal quadrato della retta L al rettangolo HGE , siccome I a K , ovvero come il quadrato della retta L al quadrato della retta M : e quindi sarà (*19. El. V.*) il rettangolo AGC al difetto del rettangolo HGE dal quadrato della retta M , siccome I a K . Laonde presa la retta EN lungo la EG , e verso del punto G , tal che il rettangolo HEN sia uguale al quadrato della retta M , sarà la EN data di grandezza, ed il punto N toccherà la retta data di sito NO parallela ad EF , ed il difetto del rettangolo HGE dal quadrato della retta M sarà uguale al rettangolo HGN ; Ma si è dimostrato essere il rettangolo AGC al difetto del rettangolo HGE dal quadrato della

retta M , come I a K . Dunque sarà pure il rettangolo AGC al rettangolo HGN nella data ragione di I a K ; e perciò il punto G ne toccherà per lo porisma primo una data sezione conica.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si tiri ovunque sulla retta EF la PQ , che formi con quella gli stessi angoli, che vi dovrà fare la retta in paratesi condottavi dal punto in questione, e tale che il rettangolo HPQ sia uguale al quadrato della retta M ; indi dal punto Q si tiri la QO parallela ad EF ; e perchè sono date di sito le rette AB , CD , ed OQ si ritrovi per lo porisma primo quella sezione conica, in cui preso ad arbitrio il punto G , e tirate da esso rispettivamente sulle AB , CD , ed OQ le rette in paratesi GA , GC , e GN sia il rettangolo AGC al rettangolo HGN nella data ragione di I a K . Ciò premesso, cada in primo luogo il punto G al di fuori delle rette EF , ed NO , e dalla parte EN . E poichè il rettangolo AGC sta per costruzione al rettangolo HGN , come I a K , ossia come il quadrato di L al quadrato di M , sarà (12. *El. V.*) il rettangolo AGC insieme col quadrato di L al rettangolo HGN insieme col quadrato di M , come il quadrato di L al quadrato di M . Ma il rettangolo HGN insieme col quadrato di M è uguale a tutto il rettangolo HGE per essere il quadrato di M uguale al rettangolo HEN .

Dunque sarà ancora il rettangolo AGC insieme col quadrato di L al rettangolo HGE, siccome I a K, vale a dire il rettangolo AGC è minore del rettangolo HGE in quanto alla data ragione di I a K, ed il quadrato della retta L n'è la data grandezza.

In secondo luogo il punto G (*Fig. 41.*) cada fuori delle rette EF, ed NO, e dalla parte NE, sarà in tal caso il rettangolo HGN maggiore del rettangolo HEN; ma per costruzione il rettangolo AGC sta al rettangolo HGN, come il quadrato di L al quadrato di M. Dunque sarà ancora il rettangolo AGC minore del quadrato di L, e l'eccesso del rettangolo AGC sul quadrato di L all'eccesso del rettangolo HGN sul quadrato di M, come il quadrato di L al quadrato di M. Ma l'eccesso del rettangolo HGN sul quadrato di N ne pareggia il rettangolo HGE, essendo per costruzione il quadrato di M uguale al rettangolo HEN. Dunque sarà ancora l'eccesso del rettangolo AGC sul quadrato di L al rettangolo HGE, siccome il quadrato di L al quadrato di M. Che se poi il punto G ne cada tra le rette EF, ed NO (*Fig. 42.*), allora sarà il rettangolo HGN minore del rettangolo HEN, ed argomentando, come dianzi, si rileverà essere il difetto del rettangolo AGC dal quadrato di L al rettangolo HGE, come il quadrato di L al quadrato di M; vale a dire in entrambi questi due casi il rettangolo AGC è maggiore del rettangolo HGE in quanto alla data ragione di I a K, ed il quadrato della

retta L n'è la data grandezza (*Def. 12. de' dati.*); e perciò G è il punto richiesto, e ne tocca la descritta sezione conica. $C. B. R.$

LEMMA AL PORISMA SEGUENTE.

Sieno date di sito le rette AB , CD , ed EF , (*Fig. 43.*), a cui dal punto G sieno condotte rispettivamente le rette in paratesi GA , GC , e GE per modo, che il rettangolo di due di queste rette, poniamo delle GA , e GC sia minore, o maggiore del quadrato della rimanente GE in quanto alla data ragione de' quadrati delle rette H , ed I , di cui il quadrato di H n'è la data grandezza; indi dallo stesso punto G si conducano sulle medesime rette AB , CD , ed EF rispettivamente le GK , GL , e GM , che facciano con quelle anche angoli dati. Dico essere ancora il rettangolo KGL minore, o maggiore del quadrato di GM in quanto ad una data ragione. E viceversa, se in quanto a questa data ragione sia minore, o maggiore il rettangolo KGL del quadrato di GM , intendendosi già tirate le rette in paratesi GA , GC , e GE ; dico essere benanche il rettangolo AGC , minore, o maggiore del quadrato di GE in quanto alla ragione del quadrato di H al quadrato di I .

Imperciocchè essendo dati per ipotesi gli angoli GAK , e GKA del triangolo GKA , sarà data la ragione di GK a GA . Similmente per essere

dati gli angoli GCL, e GLC del triangolo GCL, sarà data la ragione di GL a GC; e quindi sarà anche data la ragione del rettangolo KGL al rettangolo AGC, che pongasi uguale a quella de' quadrati delle date rette N, ed H; laonde avremo (12. *El. V.*) il rettangolo KGL insieme col quadrato di N al rettangolo AGC insieme col quadrato di H, come il quadrato di N al quadrato di H. Ma essendo per ipotesi il rettangolo AGC minore del quadrato di GE in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I, l'è ancora il rettangolo AGC insieme col quadrato di H al quadrato di GE, come il quadrato di H al quadrato di I. Dunque sarà per equalità ordinata il rettangolo KGL insieme col quadrato di N al quadrato di GE, come il quadrato di N al quadrato di I. Ma per essere dati gli angoli GEM, e GME del triangolo GEM n'è data la ragione del quadrato di GE al quadrato di GM, che facciasi uguale a quella de' quadrati delle date rette I, ed O. Dunque di nuovo per equalità ordinata sarà il rettangolo KGL insieme col quadrato di N al quadrato di GM, come il quadrato di N al quadrato di O, vale a dire il rettangolo KGL sarà minore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O, ed il quadrato di N n'è la data grandezza (*Def. 12. de' dati*).

Ghe se poi il rettangolo AGC suppongasì maggiore del quadrato di GE in quanto alla data ragione del

quadrato di H al quadrato di I, allora argomentando per la 19. dell'El. V. si dimostrerà similmente, che la differenza del rettangolo KGL, e del quadrato di N stia al quadrato di GM, come il quadrato di N al quadrato di O, vale a dire il rettangolo KGL sarà maggiore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O, ed il quadrato di N n'è la data grandezza.

Viceversa, sia il rettangolo KGL minore, o maggiore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O, intendendosi già tirate le rette in paratesi GA, GC, e GE. Dico essere benanche il rettangolo AGC minore del quadrato di GE in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I.

Sia in primo luogo il rettangolo KGL minore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O, sarà il rettangolo KGL insieme col quadrato di N al quadrato di GM, siccome il quadrato di N al quadrato di O. Ciò posto, essendo per costruzione il rettangolo KGL insieme col quadrato di N al rettangolo AGC insieme col quadrato di H, come il quadrato di N al quadrato di H, sarà invertendo il rettangolo AGC insieme col quadrato di H al rettangolo KGL insieme col quadrato di N, come il quadrato di H al quadrato di N. Ma dianzi si è dimostrato il rettangolo KGL insieme col quadrato di N al quadrato di GM, come il

quadrato di N al quadrato di O, ed il quadrato di GM per costruzione sta al quadrato di GE, come il quadrato di O al quadrato di I. Dunque per equalità ordinata, sarà il rettangolo AGC insieme col quadrato di H al quadrato di GE, come il quadrato di H al quadrato di I; vale a dire il rettangolo AGC sarà minore del quadrato di GE in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I.

In secondo luogo il rettangolo KGL sia maggiore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di L al quadrato di O, si dimostrerà, come dianzi, essere la differenza del rettangolo AGC, e del quadrato di H al quadrato di GE, come il quadrato di H al quadrato di I, vale a dire il rettangolo AGC sarà anche maggiore del quadrato di GE in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I. C. B. D.

COR. Essendosi dimostrato il rettangolo KGL al rettangolo AGC, come il quadrato di N al quadrato di H, ne siegue, che se il rettangolo KGL sia minore, o maggiore del quadrato di N, anche il rettangolo AGC sarà minore, o maggiore del quadrato di H (14. El. V.).

PORISMA QUINTO.

Date di sito tre linee rette, ritrovare un punto, dal quale condotte sulle date linee tre rette in paratesi, sia il rettangolo di due di queste rette

minore, o maggiore del quadrato della rimanente in quanto ad una data ragione.

Sieno AB , CD , ed EF le rette date di sito (*Fig. 43.*). Bisogna ritrovare un punto G , dal quale tirate sulle date linee AB , CD , ed EF le rette in paratesi GA , GC , e GE rispettivamente, sia il rettangolo di due di queste rette, poniamo delle GA , e GC minore, o maggiore del quadrato della rimanente GE in quanto ad una ragione data, che facciasi uguale a quella de' quadrati delle rette H , ed I , ed il quadrato della retta H siane la data grandezza.

PROPOSIZIONE I.

Sieno parallele le date rette AB , CD , ed EF (*Fig. 44.*). Bisogna ritrovare quel punto, che si è proposto di anzi.

Suppongasi essere G il punto richiesto, da cui si tirino sulle date rette AB , CD , ed EF le GK , GL , e GM parallele ad una data retta PQ , che segghi le AB , CD , ed EF ne' punti P , R , ed S rispettivamente, sarà per lo lemma precedente il rettangolo KGL minore, o maggiore del quadrato di GM in quanto ad una data ragione, che rinvergasi uguale a quella de' quadrati delle date rette N , ed O , ed il quadrato della retta N siane la data grandezza. Ciò premesso, si tiri dal punto G sulla retta PS la GQ parallela alle AB , CD , ed EF , sarà chiaro a cagione de' parallelo-

grammi GP, GR, e GS, che il rettangolo KGL sia uguale al rettangolo PQR, ed il quadrato di GM uguale al quadrato di QS. Ma si è dimostrato il rettangolo KGL minore, o maggiore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O. Dunque sarà pure il rettangolo PQR minore, o maggiore del quadrato di QS in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O. Ma è data la retta PR, ed in essa sono dati i punti P, R, ed S. Dunque sarà ancora dato il punto Q; e quindi la QS, in cui ne giace il punto G, è una retta data di sito.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si tiri ovunque la retta PR, che seghi le date rette AB, CD, ed EF ne' punti P, R, ed S rispettivamente, e si esibisca, come si è detto, la ragione di N ad O: indi nella data retta PR, ed in essa i dati punti P, R, ed S, si ritrovi il punto Q per modo, che il rettangolo PQR sia minore, o maggiore del quadrato di QS in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O (1). Finalmente si tiri dal punto Q la retta QG parallela alle rette AB, CD, ed EF, ed in essa si prenda un qualunque punto G, dal quale si conduca la

(1) Vedi Simpson *de sectione determinata* Lib. III. Probl. V, e VI.

retta GK parallela a PR, e che seghi le rette AB, CD, ed EF ne' punti K, L, ed M rispettivamente. E poichè a cagione de' parallelogrammi QK, QL, e QM il rettangolo PQR è uguale al rettangolo KGL, ed il quadrato di QS è uguale al quadrato di GM, e per costruzione il rettangolo PQR è minore, o maggiore del quadrato di QS in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O, sarà ancora il rettangolo KGL minore, o maggiore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O. Quindi condotte dal punto G sulle AB, CD, ed EF le rette in paratesi GA, GC, e GE, sarà benanche per lo lemma precedente il rettangolo delle GA, e GC minore, o maggiore del quadrato di GE in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I; e perciò G è il punto richiesto, e ne tocca la retta GQ parallela alle date rette AB, CD, ed EF. C. B. R.

PROPOSIZIONE II.

Sieno parallele due delle date rette, poniamo in primo luogo le AB, e CD, e la terza EF le seghi ne' punti P, e Q rispettivamente. (Fig. 45, 46, e 47.). Bisogna ritrovare quel punto, che si è proposto di sopra.

Suppongasì essere G il punto richiesto, dal quale si tirino rispettivamente sulle date rette

AB, CD, ed EF le GK, e GL parallele ad EF, e la GM parallela ad AB, e CD, sarà per lo lemma precedente il rettangolo KGL minore, o maggiore del quadrato di GM in quanto ad una data ragione, che rinveniasi uguale a quella de' quadrati delle date rette N, ed O, di cui il quadrato di N siane la data grandezza. Ciò premesso, sia in primo luogo (*Fig. 45.*) il rettangolo KGL minore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O, sarà in tal caso il rettangolo KGL insieme col quadrato di N al quadrato di GM, come il quadrato di N al quadrato di O, e prendendo la LR nella retta LK per modo, che il rettangolo LRK sia uguale al dato quadrato di N, saranno date di grandezza le due rette LR, ed RK per esserne data la LK, e presa la LS uguale alla KR, i punti R, ed S, com'è chiaro, ne toccheranno due rette date di sito TR, e VS parallele ad AB, e CD, che ne incontrano la EF ne' dati punti T, e V, ed il rettangolo LGK insieme col quadrato di N sarà uguale al rettangolo SGR (*lem. I. pr. V. por. I.*); onde sarà ancora il rettangolo SGR, o il suo uguale VMT al quadrato di GM, come il quadrato di N al quadrato di O: e perciò il punto G ne toccherà una data ellisse, che si cambierà in un dato cerchio, se mai sia di ugnaglianza la ragione di N ad O, e le AB, e CD perpendicolari ad EF.

In secondo luogo (*Fig. 46.*) il rettangolo KGL

sia maggiore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O, ed il rettangolo LGK sia primieramente minore della data grandezza, ossia del rettangolo LRK, sarà l'eccesso del rettangolo LRK sul rettangolo LGK al quadrato di GM, come il quadrato di N al quadrato di O. Ma un tal'eccesso ne pareggia il rettangolo SGR, o il suo uguale VMT (*lem. I. pr. V. por. I.*). Dunque sarà il rettangolo VMT al quadrato di MG, come il quadrato di N al quadrato di O; e perciò il punto G ne toccherà ancora una data ellisse. Che se poi il rettangolo LGK sia maggiore del rettangolo LRK (*Fig. 47.*), allora il punto G caderà fuori delle rette TR, e VS, e si rileverà similmente essere il rettangolo VMT al quadrato di MG, come il quadrato di N al quadrato di O; onde il punto G ne toccherà una data iperbole.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si esibisca, come si è detto, la ragione de' quadrati di N, e di O, e si ritrovino le rette QT, e TP per modo, che il rettangolo QTP sia uguale al quadrato di N (*Fig. 45, 46, e 47.*): indi presa la QV uguale alla PT, da' punti T, e V si tirino le rette TR, e VS parallele ad AB, e CD, e si tolga dalla TR la TU, a cui la VT stiane in duplicata ragione di N ad O. Ciò premesso, sia in primo luogo il rettangolo delle rette in pa-

ratesi tirate dal punto in quistione sulle AB, e CD minore del quadrato della retta in paratesi tirata da quello stesso punto sulla EF in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I, ovvero quel rettangolo sia maggiore di quel quadrato, ma però sia esso minore della data grandezza, in entrambi questi casi (*Fig. 45, e 46.*) si descriva la ellisse VGT, di cui VT ne sia il diametro, la TU il parametro, e le ordinate al diametro sieno parallele ad AB, e CD, ed ella si cambierà in un cerchio quante volte sia d'uguaglianza la ragione di N ad O, e le rette AB, e CD sieno perpendicolari alla retta EF. In fatti prendasi nel perimetro della descritta ellisse il punto G, dal quale si conducano rispettivamente sulle date rette AB, CD, ed EF le GK, e GL parallele ad EF, e la GM parallela alle AB, e CD, ed il punto G (*Fig. 45.*) cadane primieramente tra le rette AB, e CD. E poichè per la descritta ellisse il rettangolo VMT sta al quadrato di MG, come VT a TU, o sia come il quadrato di N al quadrato di O, ed il rettangolo VMT è uguale al rettangolo QMP insieme col rettangolo QTP, (*lem. I. pr. V. Por. I.*), sarà ancora il rettangolo QMP insieme col rettangolo QTP al quadrato di MG, come il quadrato di N al quadrato di O. Ma il rettangolo QTP è uguale per costruzione al quadrato di N, ed il rettangolo QMP è uguale al rettangolo LGK. Dunque sarà pure il rettangolo LGK insieme col

quadrato di N al quadrato di GM, come il quadrato di N al quadrato di O, vale a dire il rettangolo LGK è minore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O, ed il quadrato di N n'è la data grandezza: laonde tirate dal punto G sulle AB, CD, ed EF le rette in paratesi GA, GC, e GE, sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo delle GA, e GC minore del quadrato di GE in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I, ed il quadrato di H n'è la data grandezza.

Che se poi il punto G (Fig. 46.) cada fuori delle rette AB, e CD, allora il rettangolo VMT sarà uguale alla differenza de' rettangoli QTP, e QMT: ed essendo a cagione dell' ellisse VGT il rettangolo VMT al quadrato di MG, come il quadrato di N al quadrato di O, sarà ancora la differenza de' rettangoli QTP, e QMT, o de' loro uguali LGK, ed LRK al quadrato di GM, come il quadrato di N al quadrato di O, cioè a dire il rettangolo LGK è maggiore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O, ed è manifesto, che il rettangolo LGK è minore del rettangolo LRK, che n'è la data grandezza: onde per lo lemma precedente tirate dal punto G sulle AB, CD, ed EF le rette in paratesi GA, GC, e GE, sarà ancora il rettangolo delle GA, e GC maggiore del quadrato di GE in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I, ed il rettangolo della GA, e GC sarà anche minore

della data grandezza, o sia del quadrato di H.

In secondo luogo il rettangolo delle rette in paratesi condotte dal punto in quistione sulle AB, e CD sia maggiore del quadrato della retta in paratesi condotta da quello stesso punto sulla EF, essendo però quel rettangolo maggiore della data grandezza, in tal caso si descrivano co'medèsimi dati le iperboli opposte TG, e VG (*Fig. 47.*), nel di cui perimetro preso ad arbitrio il punto G, e fatta la stessa costruzione si mostrerà come dianzi, che il rettangolo delle GA, e GC sia maggiore del quadrato di GE in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O, e che il rettangolo delle GA, e GC sia maggiore della data grandezza. Laonde G è il punto richiesto, e ne tocca le descritte sezioni coniche. C. B. R.

PROPOSIZIONE III.

In secondo luogo la retta EF sia parallela ad una delle rimanenti, poniamo alla AB, e la CD seghi le AB, ed EF ne' punti P, e Q rispettivamente (*Fig. 48, 49, e 50.*). Bisogna ritrovare quel punto, che abbia le condizioni esposte nel porisma.

Suppongasi essere G il punto richiesto, da cui si tirino sulle date rette AB, EF, e CD le GK, e GM parallele a CD, e la GL parallela ad AB, ed RF, sarà per lo lemma precedente il rettangolo KGL minore, o maggiore del quadrato di

GM in quanto ad una data ragione , che rin-
 vengasi uguale a quella de' quadrati delle date
 rette N, ed O , ed il quadrato di N siane la data
 grandezza. Ciò posto, sia in primo luogo il ret-
 tangolo KGL (Fig. 48.) minore del quadrato di
 GM in quanto alla data ragione del quadrato di N
 al quadrato di O, sarà il rettangolo KGL insieme
 col quadrato di N al quadrato di GM, siccome
 il quadrato di N al quadrato di O, e per la 19.
 dell' El. V. il rettangolo KGL sarà all' eccesso del
 quadrato di GM sul quadrato di O, siccome il
 quadrato di N al quadrato di O. Laonde tolta dalla
 MG la MR per modo, che il rettangolo delle GK,
 ed MR sia uguale all' eccesso del quadrato di GM
 sul quadrato di O, sarà ancora il rettangolo KGL
 al rettangolo delle GK, ed MR nella data ragione
 del quadrato di N al quadrato di O. Ma il ret-
 tangolo KGL sta al rettangolo delle GK, ed MR,
 come GL, o la sua uguale QM ad MR. Dunque
 sarà benanche QM ad MR nella data ragione del
 quadrato di N al quadrato di O. Ma è dato l' an-
 golo QMR compreso dalle rette QM, ed MR.
 Adunque congiunta la QR sarà dato di magnitu-
 dine l' angolo MQR, e per esserne dato il punto
 Q, e la retta QM, la QR sarà anche data di sito.
 Ma essendo, il rettangolo delle GK, ed MR uguale
 per costruzione all' eccesso del quadrato di GM sul
 quadrato di O, sarà la differenza del rettangolo di
 GK, ed MR, e del rettangolo KGM uguale alla
 differenza dell' eccesso del quadrato di GM sul

quadrato di O , e dello stesso rettangolo KGM , vale a dire sarà il rettangolo KGR uguale al rettangolo GMK insieme col quadrato di O : quindi presa sulla RG la RS uguale ad MK , onde il rettangolo di GK , ed RS è uguale al rettangolo GKM , sarà pure la differenza del rettangolo di GK , ed RS , e del rettangolo KGR , o sia il rettangolo KGS uguale alla differenza del rettangolo GKM , e del rettangolo GMK insieme col quadrato di O , cioè uguale alla differenza de' quadrati di MK , e di O . Ma essendo per costruzione la RS uguale alla data retta MK , il punto S ne toccherà , com'è chiaro , la retta ST data di sito parallela alla QR , ed inclinata ad AB . Dunque il punto G ne toccherà una data iperbole .

In secondo luogo il rettangolo LGK sia maggiore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O , ed il rettangolo LGK sia primieramente minore del quadrato di N , sarà in tal caso l'eccesso del quadrato di N sul rettangolo LGK al quadrato di GM , come il quadrato di N al quadrato di O , e per la 19. dell' El. V. sarà il rettangolo LGK all'eccesso del quadrato di O sul quadrato di GM , come il quadrato di N al quadrato di O . Laonde aggiunta per dritto alla MG la MR per modo , che il rettangolo di GK , ed MR sia uguale all'eccesso del quadrato di O sul quadrato di GM , sarà il rettangolo KGL al rettangolo di GK , ed MR , come il quadrato di N al quadrato di O ,

ed unita la QR si dimostrerà , come dianzi , essere la QR data di sito , ed aggiungendo al rettangolo KGM il rettangolo di GK , ed MR , e l' eccesso del quadrato di O sul quadrato di GM , avremo similmente il rettangolo KGR uguale al rettangolo GMK insieme col quadrato di O , e prendendo sulla RG la RS uguale ad MK si rileverà nell' istesso modo , che il punto G ne toccherà ancora una data iperbole.

Che se poi il rettangolo LGK (*Fig. 5o.*) sia maggiore della data grandezza , sarà in tal caso l' eccesso del rettangolo LGK sul quadrato di N al quadrato di GM , come il quadrato di N al quadrato di O , e per la 12. dell' El. V. sarà il rettangolo LGK al quadrato di GM insieme col quadrato di O , come il quadrato di N al quadrato di O . Quindi presa la MR per modo , che il rettangolo di GK , ed MR sia uguale al quadrato di GM insieme col quadrato di O , ed unita la QR si rileverà come dianzi essere la QR data di sito . E perchè il rettangolo delle GK , ed MR è uguale per costruzione al quadrato di GM insieme col quadrato di O , sarà la differenza del rettangolo di GK , ed MR , e del rettangolo KGM uguale alla differenza del quadrato di GM insieme col quadrato di O , e dello stesso rettangolo KGM , vale a dire il rettangolo KGR sarà uguale all' eccesso del rettangolo GMK sul quadrato di O . Laonde presa sulla RG la RS uguale alla data retta MK , per cui il rettangolo GKM n' è uguale al rettangolo di GK , ed RS ,

sarà benanche la differenza del rettangolo di KG, ed RS, e del rettangolo KGR uguale alla differenza del rettangolo GKM, e dell'eccesso del rettangolo GMK sul quadrato di O, vale a dire sarà il rettangolo KGS uguale al quadrato di MK insieme col quadrato di O. Ma essendo per costruzione la RS uguale alla data retta MK, il punto S ne toccherà ancora una data retta di sito parallela a QR, ed inclinata ad AB. Dunque il punto G ne toccherà benanche una data iperbole. Intanto il problema compongasì in questo modo.

Si esibisca, come si è detto, la ragione de' quadrati di N, e di O, e presa nella QE la QV uguale ad N, e tirata dal punto V la VU parallela a CD, e terza proporzionale in ordine alle rette N, ed O, si congiunga la UQ, e si prolunghi quanto si voglia. Similmente presa nella QC la QZ uguale a QP, si tiri dal punto Z la ZS parallela ad UQ, che ne incontri la AB nel punto T, ed unita, la TQ producasì indefinitamente. Ciò premesso, il rettangolo delle rette in paratesi condotte dal punto in quistione sulle AB, e CD (*Fig. 48.*) sia in primo luogo minore del quadrato della retta in paratesi condotta da quello stesso punto sulla EF in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I, ovvero quel rettangolo sia maggiore di quel quadrato, essendo però esso minore della data grandezza, in entrambi questi casi tra le rette TB, e TQ si adatti la

XY parallela a CD , e tale, che il di lei quadrato ne pareggi la differenza de' quadrati delle rette O , e QP . Indi tolgaſi dalla QT la Tx uguale alla TX , ed eſſendo il quadrato di QP maggiore del quadrato di O ſi deſcrivano le iperboli oppoſte XG , ed xG , che abbiano le rette TB , e TS per aſintoti, e paſſino per i punti X , ed x , o ch'è lo ſteſſo, abbiano per loro ſemidiametri conjugati le rette TX , ed XY . L'iperbole XG , com'è chiaro, aſcinde dalla CD le Qa , e Qb uguali tra loro, e ciaſcuna uguale ad O . Imperciocchè eſſendo per ipotesi il quadrato di XY uguale all'eceſſo del quadrato di QP ſul quadrato di O , ſarà il quadrato di QP uguale al quadrato di XY inſieme col quadrato di O . Ma il quadrato di QP è uguale al rettangolo ZbP inſieme col quadrato di Qb , ed il rettangolo ZbP è uguale al quadrato di XY . Dunque ſarà il quadrato di Qb uguale al quadrato di O , e con ciò la Qb del pari che la Qa ſarà uguale ad O . Intanto prendasi il punto G nel perimetro delle iperboli oppoſte XG , ed xG com-preſo dagli angoli CPB , ed APD ; e da eſſo ſi tirino riſpettivamente ſulle AB , EF , e CD le GK , e GM parallele a CD , e la GL parallela ad AB , ed EF , ſarà il quadrato di GM maggiore del quadrato di O . E poichè il rettangolo KGS è uguale al quadrato di XY a cagione dell' iperbole XG tra gli aſintoti TB , e TS , ed il quadrato di XY è eguale per coſtruzione all'eceſſo del quadrato di QP , o della ſua uguale MK ſul quadrato di O , ſarà il

rettangolo KGS ancora uguale all' eccesso del quadrato di MK sul quadrato di O , ed essendo la RS , com'è chiaro , uguale alla MK , sarà benanche il rettangolo di KG , ed RS uguale al rettangolo GKM. Adunque sarà la differenza del rettangolo di KG , ed RS , e del rettangolo KGS uguale alla differenza del rettangolo GKM , e dell' eccesso del quadrato di MK sul quadrato di O , cioè il rettangolo KGR sarà uguale al rettangolo GKM insieme col quadrato di O , e di nuovo prendendo la differenza di ciascuna di queste quantità uguali , e del rettangolo KGM si avrà il rettangolo di KG , ed MR uguale all' eccesso del quadrato di GM sul quadrato di O. Ma il rettangolo KGL sta al rettangolo di GK , ed MR , come GL , o la sua uguale QM ad MR. Dunque sarà ancora il rettangolo KGL all' eccesso del quadrato di GM sul quadrato di O , come QM ad MR. Ma pe' triangoli simili QMR , e QVU , QM è ad MR , come QV a VU , ossia per costruzione come il quadrato di N al quadrato di O. Dunque sarà ancora il rettangolo KGL all' eccesso del quadrato di GM sul quadrato di O , come il quadrato di N al quadrato di O , e quindi (12. El. V.) sarà il rettangolo KGL insieme col quadrato di N al quadrato di GM , come il quadrato di N al quadrato di O , vale a dire sarà il rettangolo KGL minore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O. Laonde tirate dal punto G sulle

AB, CD, ed EF le rette in paratesi GA, GC, e GE rispettivamente, sarà ancora il rettangolo delle GA, e GC minore del quadrato di GE in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I. Che se poi il quadrato di QP sia minore del quadrato di O, allora (*Fig. 49.*) descrivansi le iperboli opposte cG, e dG conjugate delle xG, ed XG, ossia che abbiano XY, ed XT per loro semidiametri conjugati, e preso il punto G nel perimetro di esse compreso dagli angoli CPB, ed APD, e fatta la stessa costruzione, sarà il quadrato di GM maggiore del quadrato di O, ed aggiungendo rispettivamente agli uguali rettangoli di KG, ed RS, e GKM il rettangolo KGS, e l'eccesso del quadrato di O sul quadrato di MK, si rileverà come dianzi esserne il rettangolo AGC minore del quadrato di GE in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I.

Ma se poi il punto G (*Fig. 48, e 49.*) prendasi al di fuori de' detti angoli, e nel perimetro della iperbole XG, ovvero in quello delle cG, e dG, secondochè il quadrato di QP sia maggiore, o minore del quadrato di O, allora fatta la stessa costruzione, ben si vede essere il quadrato di MG minore del quadrato di O. Ed argomentando nello stesso modo, si rileverà essere il rettangolo KGL all'eccesso del quadrato di O sul quadrato di MG, come il quadrato di N al quadrato di O: e quindi per la 19. dell' El. V. sarà

l'eccesso del quadrato di N sul rettangolo KGL al quadrato di GM, come il quadrato di N al quadrato di O; vale a dire il rettangolo KGL sarà maggiore del quadrato di MG in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O, essendo il rettangolo KGL minore della data grandezza, ossia del quadrato di N. Laonde intendendosi tirate dal punto G sulle AB, CD, ed EF le rette in paratesi GA, GC, e GE, sarà ancora il rettangolo AGC maggiore del quadrato di GE in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I, ed il rettangolo AGC sarà ben anche minore della data grandezza, cioè del quadrato di H (*cor. lem. prec.*).

In secondo luogo il rettangolo delle rette in paratesi condotte dal punto in quistione sulle AB, e CD sia maggiore del quadrato della retta in paratesi condotta dallo stesso punto sulla EF in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I; e sia il detto rettangolo maggiore della data grandezza, ossia del quadrato di H, in tal caso tra le rette TB, e TQ (*Fig. 50.*) si adatti la XY parallela a CD, e tale, che il di lei quadrato ne pareggi la somma de' quadrati di QP, e di O pres' insieme: indi sulla XT si prenda la Tx uguale alla TX, e si descrivano le iperboli opposte XG, ed xG, che abbiano per asintoti le TB, e TS, o ch' è lo stesso, abbiano TX, ed XY per loro semidiametri conjugati. Finalmente prendasi ovunque nel perimetro di

queste iperboli il punto G , da cui si tirino rispettivamente sulle AB , EF , e CD le GM , e GK parallele a CD , e la GL parallela ad AB , ed EF . E poichè il rettangolo KGS è uguale al quadrato di XY , che per ipotesi ne pareggia i quadrati di O , e di QP , o della sua uguale MK pres' insieme, sarà ancora il rettangolo KGS uguale a' due quadrati di MK , e di O pres' insieme; ed essendo la RS , com'è chiaro, uguale alla MK , sarà ancora il rettangolo di KG , ed RS uguale al rettangolo GKM . Adunque la differenza del rettangolo di KG , ed RS , e del rettangolo KGS sarà uguale alla differenza del rettangolo GKM , e de' quadrati di MK , e di O pres' insieme, vale a dire, sarà il rettangolo KGR uguale all' eccesso del rettangolo GKM sul quadrato di O ; e prendendo la differenza di ciascuna di queste grandezze uguali, e del rettangolo GKM sarà il rettangolo di KG , ed RM uguale a' quadrati di GM , e di O pres' insieme: onde dimostrando nell' istessa guisa si rileverà ancora, che il rettangolo KGL stia al rettangolo di KG , ed MR , ossia a' quadrati di MK , e di O pres' insieme, come il quadrato di N al quadrato di O , e per la 19. dell' El. V. sarà l' eccesso del rettangolo KGL sul quadrato di N al quadrato di GM , come il quadrato di N al quadrato di O , vale a dire il rettangolo KGL è maggiore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O . Laonde in-

tendendosi tirate dal punto G sulle AB, CD, ed EF le rette in paratesi GA, GC, e GE, sarà ancora il rettangolo AGC maggiore del quadrato di GE in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I, ed il rettangolo AGC ne sarà benanche maggiore della data grandezza, ossia del quadrato di H (*cor. lem. prec.*); e perciò G è il punto richiesto, e ne tocca le divise iperboli. C. B. R.

PROPOSIZIONE IV.

Le date rette AB, CD, ed EF si interseghino nello stesso punto P (*Fig. 51, 52, e 53.*). Bisogna ritrovare quel punto, che si è proposto di sopra.

Suppongasi essere G il punto richiesto, da cui si conducano rispettivamente sulle date rette AB, CD, ed EF le GK, e GL parallele ad EF e la GM parallela alla PQ, che unisce il vertice P del triangolo KPL, ed il punto medio Q della sua base KL, che sarà data di sito. Adunque per lo lemma precedente, sarà ancora il rettangolo KGL maggiore, o minore del quadrato di GM in quanto ad una data ragione, che rinvengasi uguale a quella de' quadrati delle date rette N, ed O. Ciò posto, sia in primo luogo (*Fig. 51.*) il rettangolo KGL minore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di C, sarà il rettangolo KGL insieme col quadrato di N al quadrato di GM, come il quadrato di N al quadrato di O; quindi

presa nella retta QK la QR per modo, che il di lei quadrato ne adegui il rettangolo KGL insieme col quadrato di N, sarà ancora il quadrato di QR al quadrato di GM, o della sua uguale QP, come il quadrato di N al quadrato di O, e QR a QP nella data ragione di N ad O. Ma è dato l'angolo PQR compreso dalle rette QP, e QR: dunque unita la PR, sarà dato di magnitudine l'angolo QPR, e per essere dato il punto P, e la PQ, la PR ne sarà anche data di sito. Inoltre essendo il quadrato di QR uguale al rettangolo KGL insieme col quadrato di N, tolte queste quantità uguali dal quadrato di QK, resterà il rettangolo KRL uguale all'eccesso del quadrato di GQ sul quadrato di N, ed il rettangolo KRL insieme col quadrato di N sarà uguale al quadrato di GQ: laonde avremo il rettangolo KRL insieme col quadrato di N al quadrato di QP, come il quadrato di GQ allo stesso quadrato di QP. Ma a cagione de' triangoli dati di specie KRP, e PRL essendo date le ragioni di KR ad RP, e di RL ad RP, sarà ancora data la ragione del rettangolo KRL al quadrato di RP, e per essere data la ragione del quadrato di RP al quadrato di PQ nel triangolo RPQ anch'esso dato di specie, sarà puranche data la ragione del rettangolo KRL al quadrato di PQ, che pongasi uguale a quella de' quadrati delle rette N, ed S. E poichè il rettangolo KRL sta al quadrato di PQ, come il quadrato di N al quadrato di S, sarà ancora

(12. *El. V.*) il rettangolo KRL insieme col quadrato di N, ossia il quadrato di GQ, che gli è uguale, al quadrato di PQ insieme col quadrato di S, come il quadrato di N al quadrato di S; e perciò il punto G ne toccherà una data iperbole rapportata al suo diametro secondario.

In secondo luogo (*Fig. 52.*) il rettangolo KGL sia maggiore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O, ed il rettangolo KGL ecceda primieramente la data grandezza, ossia il quadrato di N, sarà in tal caso l'eccesso del rettangolo KGL sul quadrato di N al quadrato di GM, come il quadrato di N al quadrato di O, e presa similmente la QR nella QK per modo, che il di lei quadrato ne adegui l'eccesso del rettangolo KGL sul quadrato di N, ed unita la PR, si dimostrerà come dianzi essere la PR data di sito. E togliendo dal quadrato di QK gli uguali spazii, cioè il quadrato di QR, e l'eccesso del rettangolo KGL sul quadrato di N, resterà il rettangolo KRL uguale al quadrato di GQ insieme col quadrato di N; e con ciò l'eccesso del rettangolo KRL sul quadrato di N sarà uguale al quadrato di GQ: onde argomentando per la 19. dell' *El. V.* si rileverà nello stesso modo, che il quadrato di GQ stia all'eccesso del quadrato di PQ sul quadrato di S, come il quadrato di N al quadrato di S: e perciò il punto G ne toccherà una data iperbole rapportata al suo diametro primario.

Che se poi il rettangolo KGL (*Fig. 53.*) sia minore del quadrato di N, allora sarà l'eccesso del quadrato di N sul rettangolo KGL al quadrato di GM, come il quadrato di N al quadrato di O. Sicchè presa benanche la QR nella QK per modo, che il quadrato di QR ne pareggi l'eccesso del quadrato di N sul rettangolo KGL, ed unita la PR, si dimostrerà similmente essere la PR data di sito, ed aggiungendo al quadrato di QK gli uguali spazii, cioè il quadrato di QR, e l'eccesso del quadrato di N sul rettangolo KGL, avremo i quadrati di QK, e di QR uguali ai due quadrati di GQ, e di N pres' insieme, e con ciò il quadrato di GQ sarà uguale all'eccesso de' due quadrati di QR, e di QK sul quadrato di N. Ma pe' triangoli dati di specie PQQ, e PQR essendo data la ragione de' quadrati di QR, e di QK allo stesso quadrato di QP, ne sarà anche data la ragione de' quadrati di QK, e di QR pres' insieme al quadrato di PQ, che pongasi uguale a quella de' quadrati di N, e di S. Dunque essendo i quadrati di QR, e di QK pres' insieme al quadrato di QP, come il quadrato di N al quadrato di S, sarà (19. *El. V.*) l'eccesso de' quadrati di QK, e di QR sul quadrato di N, ovvero il quadrato di GQ, che gli è uguale, all'eccesso del quadrato di PQ sul quadrato di S, come il quadrato di N al quadrato di S, e perciò il punto G ne toccherà ancora una data iperbole.

Intanto il problema compongasì in questo modo.

Si esibisca, come si è detto, la ragione de' quadrati di N , e di O , e si tiri ovunque sulle AB , e CD la TV parallela ad EF , che si bisechi nel punto U , e si congiunga la retta UP prolungandola quanto si voglia: indi prendasi nella retta UV la UX , che stia ad UP , come N ad O . Ciò posto, il rettangolo delle rette in paratesi condotte dal punto in quistione sulle AB , e CD (*Fig. 51, e 52.*) sia in primo luogo minore del quadrato della retta in paratesi condotta da quello stesso punto sulla EF in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I , ovvero quel rettangolo sia maggiore di quel quadrato, essendo però anch'esso maggiore della data grandezza, in entrambi questi casi si ritrovi la retta S per modo, che il rettangolo TXV stia al quadrato di UP , come il quadrato di N al quadrato di S , e tolte dalle PE , e PQ le PY , e PZ uguali rispettivamente ad N , e ad S , descrivansi nel primo caso (*Fig. 51.*) le iperboli opposte YG , ed yG , di cui siane PY il semidiametro primario, e PZ il secondario. Infatti nel perimetro di ciascuna di queste iperboli prendasi ovunque il punto G , da cui si tirino sulle AB , CD , ed EF le GK , e GL parallele ad EF , che ne incontrino la XP nel punto R , e la GM parallela ad UP . Questa retta, con'è chiaro, bisecherà la KL nel punto Q , ove l'in-

contra. E poichè a cagione de' triangoli simili PKR, PVX, PRL, e PXT, KR sta ad RP, come VX ad XP, ed RL sta ad RP, come TX ad XP, sarà il rettangolo KRL al quadrato di RP, come il rettangolo TXV al quadrato di XP. Ma per gli altri triangoli simili PQR, e PUX il quadrato di RP sta al quadrato di PQ, come il quadrato di XP al quadrato di UP. Dunque sarà per egualità ordinata il rettangolo KRL al quadrato di PQ, come il rettangolo TXV al quadrato di UP, ovvero per costruzione come il quadrato di N al quadrato di S: e quindi sarà (12. El. V.) il rettangolo KRL insieme col quadrato di N al quadrato di PQ insieme col quadrato di S, come il quadrato di N al quadrato di S, ossia per costruzione come il quadrato di PY al quadrato di PZ. Ma in questa ragione l'è pure il quadrato di GQ al quadrato di PQ insieme col quadrato di PZ, o della sua uguale S, a cagione dell' iperbole YG rapportata al di lei semidiametro secondario PZ. Dunque sarà ancora il rettangolo KRL insieme col quadrato di N al quadrato di PQ insieme col quadrato di S, come il quadrato di GQ allo stesso quadrato di PQ insieme col quadrato di S; e perciò sarà il rettangolo KRL insieme col quadrato di N uguale al quadrato di GQ, ed il rettangolo KRL uguale all' eccesso del quadrato di GQ sul quadrato di N. Laonde prendendo la differenza di ciascuna di queste quantità uguali, e del quadrato di QK, si avrà il

quadrato di QR uguale al rettangolo KGL insieme col quadrato di N, ed il quadrato di RQ sarà al quadrato di QP, come il rettangolo KGL insieme col quadrato di N allo stesso quadrato di QP. Ma pe' triangoli simili RQP, ed XUP il quadrato di RQ sta al quadrato di QP, come il quadrato di XU al quadrato di UP, ossia per costruzione come il quadrato di N al quadrato di O. Dunque sarà ancora il rettangolo KGL insieme col quadrato di N al quadrato di QP, o della sua uguale GM, come il quadrato di N al quadrato di O; vale a dire il rettangolo KGL è minore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O, ed il quadrato di N n'è la data grandezza. Quindi tirate dal punto G sulle AB, CD, ed EF le rette in paratesi GA, GC, e GE, sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo AGC minore del quadrato di GE in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I, ed il quadrato di H n'è la data grandezza.

Nel secondo caso descrivansi le iperboli ZG, e zG conjugate delle YG, ed yG (*Fig. 52.*). Dappoichè preso dovunque il punto G nel loro perimetro, e facendo la stessa costruzione, ed argomentando per la 19. dell' El. V. si rileverà nello stesso modo essere l'eccesso del rettangolo KGL sul quadrato di N al quadrato di GM, come il quadrato di N al quadrato di O, cioè a dire il rettangolo KGL sarà maggiore del quadrato di GM in quanto alla

data ragione del quadrato di N al quadrato di O , ed il detto rettangolo KGL sarà maggiore della data grandezza, o sia del quadrato di N : quindi tirate dal punto G sulle AB , CD , ed EF le rette in paratesi GA , GC , e GE ; sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo delle GA , e GC maggiore del quadrato di GE in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I , ed il rettangolo delle GA , e GC sarà anche maggiore della data grandezza, ossia del quadrato di H .

In secondo luogo (*Fig. 53.*) il rettangolo delle rette in paratesi condotte dal punto in quistione sulle AB , e CD sia maggiore del quadrato della retta in paratesi tirata da quello stesso punto sulla EF in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I , essendo però quel rettangolo minore della data grandezza, ossia del quadrato di H , allora prendasi la retta S per modo, che il quadrato di UX insieme col quadrato di UV stia al quadrato di UP , come il quadrato di N al quadrato di S , e tolte dalle PQ , e PE le PY , e PZ uguali ad N , e ad S rispettivamente, intendansi descritte le iperboli opposte ZG , e zG , che abbiano per loro semidiametri conjugati le PZ , e PY . Indi si prenda ovunque nel perimetro di queste iperboli il punto G , e fatta la stessa costruzione, sarà per i triangoli simili KIQ , e VPU , RQP , ed XVP il quadrato di KQ al quadrato di QP , come il quadrato di VU al quadrato di UP , ed il quadrato di RQ al qua-

drato di QP , come il quadrato di UX al quadrato di UP , onde avremo (24. *El. V.*) il quadrato di QK insieme col quadrato di QR al quadrato di QP , come il quadrato di VU insieme col quadrato di UX al quadrato di UP , ossia per costruzione come il quadrato di N al quadrato di S ; e con ciò sarà (19. *El. V.*) l'eccesso de' quadrati di QK , e di QR sul quadrato di N all'eccesso del quadrato di QP sul quadrato di S , o della sua uguale PZ , come il quadrato di N al quadrato di S : ma in questa ragione per la natura dell'iperbole ZG l'è pure il quadrato di GQ al rettangolo zQZ . Dunque sarà ancora l'eccesso de' quadrati di QK , e di QR sul quadrato di N all'eccesso del quadrato di QP sul quadrato di PZ , come il quadrato di GQ al rettangolo zQZ , che n'è uguale, com'è chiaro, all'eccesso del quadrato di PQ sul quadrato di PZ . Adunque sarà l'eccesso de' quadrati di QK , e di QR sul quadrato di N uguale al quadrato di GQ ; e con ciò i due quadrati di QK , e di QR saranno uguali a' due quadrati di GQ , e di N pres'insieme. Laonde toltone di comune il quadrato di QK resterà il quadrato di QR uguale all'eccesso de' quadrati di GQ , e di N sul quadrato di QK , ovvero all'eccesso del quadrato di N sul rettangolo KGL : quindi avremo il quadrato di QR al quadrato di QP , come l'eccesso del quadrato di N sul rettangolo KGL allo stesso quadrato di QP . Ma pe' triangoli simili QQR , e PUX il

quadrato di RQ sta al quadrato di QP, come il quadrato di UX al quadrato di UP, ossia per costruzione, come il quadrato di N al quadrato di O. Dunque sarà benanche l'eccesso del quadrato di N sul rettangolo KGL al quadrato di QP, o della sua uguale GM, come il quadrato di N al quadrato di O, vale a dire il rettangolo KGL sarà maggiore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O, ed il rettangolo KGL sarà minore della data grandezza, ossia del quadrato di N. Quindi tirate dal punto G sulle AB, CD, ed EF le rette in paratesi GA, GC, e GE, sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo delle GA, e GC maggiore del quadrato di GE in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I, ed il rettangolo delle GA, e GC sarà anche minore della data grandezza, ossia del quadrato di H; e perciò G è il punto richiesto, e ne tocca le descritte iperboli. C. B. R.

PROPOSIZIONE V.

Finalmente le date rette AB, CD, ed EF si interseghino ne' punti P, Q, ed R rispettivamente (*Fig. 54, 55, 56, e 57.*). Bisogna ritrovare quel punto che si è proposto nel porisma.

Suppongasi essere G il punto richiesto, da cui si tirino sulle date rette AB, CD, ed EF le GK, e GL parallele ad EF, e la GM parallela a PS,

che unisce il vertice P del triangolo PKL, ed il punto medio S della base KL. Questa congiungente, com'è chiaro, biseccherà la QR nel punto T, ove l'incontra, e sarà data di sito al pari della EF, onde per lo lemma precedente sarà ancora il rettangolo KGL minore, o maggiore del quadrato di GM in quanto ad una data ragione, che rinveniasi uguale a quella de' quadrati delle date rette N, ed O, ed il quadrato di N siane la data grandezza. Ciò posto, sia in primo luogo il rettangolo KGL minore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O, sarà il rettangolo KGL insieme col quadrato di N al quadrato di GM, come il quadrato di N al quadrato di O: quindi prendendo sulla SK la retta SU per modo, che il quadrato di SU sia uguale al rettangolo KGL insieme col quadrato di N, sarà ancora il quadrato di US al quadrato di GM, o della sua uguale ST nella data ragione del quadrato di N al quadrato di O, ed US ad ST anche nella data ragione di N ad O. Ma è dato l'angolo TSU compreso dalle rette TS, ed SU. Adunque unita la retta TU, sarà dato di magnitudine l'angolo STU, e perchè n'è data di sito la TS, e n'è dato il punto T, la TU sarà anche data di sito, che incontrerà la data retta CD nel dato punto V (*pr. 25. de' dati.*). Inoltre essendo per costruzione il rettangolo KGL insieme col quadrato di N uguale al quadrato di SU,

sarà la differenza del rettangolo KGL insieme col quadrato di N, e del quadrato di SK uguale alla differenza del quadrato di SU, e dello stesso quadrato di SK; vale a dire, sarà l'eccesso del quadrato di GS sul quadrato di N uguale al rettangolo KUL.

Or essendo per avventura la TU parallela ad AB (*Fig. 54.*), sarà in tal caso la UK uguale alla retta TQ data di grandezza, e compiti i parallelogrammi VXTY, e VZSY, saranno dati, com'è chiaro i punti X, ed Y, ed il rettangolo KUL sarà al rettangolo di KU, e VZ, come UL a VZ, ovvero pe' triangoli simili VUL, e VTR nella data ragione di TR a VX. Adunque se questa ragione facciasi uguale a quella delle date rette a, ed UK, sarà ancora il rettangolo KUL al rettangolo di UK, e VZ, come a ad UK, ovvero come il rettangolo aVZ allo stesso rettangolo di UK, e VZ; e quindi sarà il rettangolo KUL uguale al rettangolo aVZ, ovvero aSY; ma il rettangolo KUL si è mostrato uguale all'eccesso del quadrato di GS sul quadrato di N. Dunque sarà ancora il rettangolo aSY uguale all'eccesso del quadrato di GS sul quadrato di N, ed il quadrato di GS uguale al rettangolo aSY insieme col quadrato di N. Laonde aggiunta per dritto alla SY la Yb tale, che il rettangolo aYb sia uguale al quadrato di N, sarà il rettangolo aSY insieme col quadrato di N, o sia il quadrato di GS uguale a tutto il rettangolo aSb; e perciò il punto G ne toccherà una data parabola.

Che se poi la TU non sia parallela ad AB, ma l'incontri nel dato punto X al di sotto, ovvero al di sopra del punto P (*Fig. 57.*), sarà chiaro, che le rette VY, ed XZ condotte da' punti V, ed X parallele ad EF ne incontreranno le date rette PS, AB, e CD ne' dati punti Y, e Z, v, ed x rispettivamente, e compiti i parallelogrammi Sa, Sb, Gc, Gd, ed Ye, sarà pe' triangoli simili KUX, e vVX KU ad UX, come vV a VX. Ma per gli altri triangoli simili XUd, ed XVe, UX sta ad Ud, come VX a Ve, ovvero alla sua uguale YZ. Dunque sarà per egualità ordinata KU ad Ud, come Vv ad YZ; similmente compiendo il parallelogrammo Zf, si dimostrerà essere LU ad Uc, come Xx ad Xf, o alla sua uguale YZ. Adunque sarà il rettangolo KUL al rettangolo dUc in ragion composta di vV ad YZ, e di Xx ad YZ, cioè come il rettangolo di vV, e di Xx al quadrato di YZ (*23. El. V.*); ed invertendo sarà il rettangolo dUc al rettangolo KUL, come il quadrato di YZ al rettangolo di vV, e di Xx; e facendo questa data ragione uguale a quella de' quadrati delle date rette g, ed N avremo il rettangolo dUc insieme col quadrato di g al rettangolo KUL insieme col quadrato di N, come il quadrato di g al quadrato di N (*12. El. V.*). Ma il rettangolo dUc è uguale al rettangolo bGa, ed il rettangolo KUL insieme col quadrato di N è uguale al quadrato di GS. Dunque sarà ancora

il rettangolo bGa insieme col quadrato di g al quadrato di GS , come il quadrato di g al quadrato di N ; e quindi per la proposizione seconda di questo porisma il punto G ne toccherà una data ellisse.

In secondo luogo il rettangolo KGL sia maggiore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O , sarà in tal caso la differenza del rettangolo KGL , e del quadrato di N al quadrato di GM , come il quadrato di N al quadrato di O ; e presa benanche la SU , il di cui quadrato ne adegui la differenza del rettangolo KGL , e del quadrato di N , ed argomentando nello stesso modo dianzi, si rileverà ancora che se la TU (*Fig. 55, e 56.*) sia parallela ad AB , il quadrato di GS ne pareggia il rettangolo aSb , onde il punto G ne toccherà una data parabola. Che se poi la TU non sia parallela ad AB (*Fig. 57.*) allora si avrà la differenza del rettangolo bGa , e del quadrato di g al quadrato di GS , come il quadrato di g al quadrato di N ; e quindi per la proposizione seconda di questo porisma il punto G ne toccherà una data ellisse, ovvero una data iperbole, secondochè il rettangolo bGa sia minore, o maggiore del quadrato di g , lo che avviene (*cor. lem. prec.*) quando il rettangolo KGL sia anch'esso minore, o maggiore della data grandezza, ossia del quadrato di N .

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si bisechi la QR nel punto T , ed unita la PT , e prolungata quanto si voglia, si esibisca, come si è detto, la ragione de' quadrati di N , e di O , indi pel punto P si meni la retta Pc parallela ad EF , e tale, che stia alla PT , come N ad O , e si congiunga Tc , che seghi la CD nel punto V . Ciò premesso, sia in primo luogo il rettangolo delle rette in paratesi tirate dal punto in quistione sulle AB , e CD minore del quadrato della retta in paratesi tirata da quello stesso punto sulla EF in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I , ovvero quel rettangolo sia maggiore di quel quadrato, essendo però esso minore delle data grandezza, ossia del quadrato di I in entrambi questi casi, se mai la cT sia per avventura parallela ad AB , (*Fig. 54, e 55.*) allora si compia il parallelogrammo $VXTY$, il di cui lato VX si prolunghi indefinitamente, e ritrovata la retta a terza proporzionale in ordine alle rette VX , e TR , si prenda sulla YP , e da questa medesima parte la Yb anche terza proporzionale in ordine alle rette a , ed N , e si descriva la parabola bG , di cui bT ne sia il diametro, b il vertice, a il parametro, e le ordinate al diametro sieno parallele alla retta EF . In fatti prendasi primieramente il punto G , nel perimetro della parabola bG compreso dagli angoli APC , e DPB , e da esso con-

ducansi sulle AB, CD, ed EF le GK, e GL parallele ad EF, che seghino le cT, TY, e VX ne' punti U, S, e Z rispettivamente, e la GM parallela a PS. Questa retta, com'è chiaro, bisecherà la KL nel punto S, ove l'incontra. E poichè a cagione de' triangoli simili VUL, e VTR sta UL a VZ, come TR a VX, ovvero per costruzione come a a TR, o alla sua uguale KU, sarà ancora (*pr. I. El. VI.*) il rettangolo KUL al rettangolo di KU, e VZ, come il rettangolo di a, e VZ allo stesso rettangolo di KU, e VZ; e perciò il rettangolo KUL sarà uguale al rettangolo aVZ, ovvero aSY, ed aggiungendovi rispettivamente il quadrato di N, ed il rettangolo aYb, che sono uguali per costruzione, avremo il rettangolo KUL insieme col quadrato di N uguale a tutto il rettangolo aSb. Ma questo rettangolo ne pareggia il quadrato di GS a cagione della parabola bG. Dunque sarà benanche il rettangolo KUL insieme col quadrato di N uguale al quadrato di GS, ed il rettangolo KUL uguale all'eccesso del quadrato di GS sul quadrato di N. Laonde prendendo la differenza di ciascuna di queste quantità uguali, e del quadrato di SK, sarà il quadrato di SU uguale al rettangolo KGL insieme col quadrato di N, e con ciò sarà il rettangolo KGL insieme col quadrato di N al quadrato di ST, come il quadrato di US allo stesso quadrato di ST: ma pe' triangoli simili UST, e cPT il quadrato di US sta al quadrato di ST, come

il quadrato di cP al quadrato di FT , ossia per costruzione, come il quadrato di N al quadrato di O . Dunque sarà pure il rettangolo KGL insieme col quadrato di N al quadrato di ST , o della sua uguale GM , come il quadrato di N al quadrato di O , vale a dire il rettangolo KGL è minore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O ; e quindi tirate dal punto G sulle AB , CD , ed EF le rette in paratesi GA , GC , e GE , sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo delle GA , e GC minore del quadrato di GE in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I , ed il quadrato di H n'è la data grandezza.

Secondariamente prendasi il punto G nel perimetro della parabola bG fuori degli angoli APC , e DPB (*Fig. 55.*), in tal caso si avrà l'eccesso del quadrato di N sul rettangolo KGL uguale al quadrato di SU ; ed argomentando come dianzi si rileverà l'eccesso del quadrato di N sul rettangolo KGL al quadrato di GM , come il quadrato di N al quadrato di O , vale a dire il rettangolo KGL sarà maggiore del quadrato di MG in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O , ed il rettangolo KGL sarà minore della data grandezza, ossia del quadrato di N . Laonde intendendosi tirate dal punto G sulle AB , CD , ed EF , le rette in paratesi GA , GC , e GE , sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo delle GA , e GC , maggiore del quadrato di GE in

quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I , ed il rettangolo delle GA , e GC sarà benanche minore della data grandezza, o sia del quadrato di H .

Che se poi la cT non sia parallela ad AB (*Fig. 57, 58, e 59.*), ma l'incontri nel punto X al di sotto del punto P , allora da' punti V , ed X conducansi le VY , ed XZ , che seghino le IS , AB , e CD ne' punti Y , e Z , v , ed x rispettivamente, e si ritrovi la retta g tale, che il di lei quadrato ne stia al quadrato di N , come il quadrato di YZ al rettangolo di Vv , ed Xx ; indi per la proposizione seconda di questo porisma intendasi descritta quella ellisse, nel di cui perimetro preso il punto G , e da esso tirate sulle date rette Vv , Xx , ed YZ le Ga , e Gb parallele ad YZ , e la GS parallela a Vv , e ad Xx , sia il rettangolo aGb minore del quadrato della GS in quanto alla data ragione del quadrato di g al quadrato di N , essendo il quadrato di g la data grandezza, ovvero in quanto alla detta ragione quel rettangolo sia maggiore di quel quadrato, secondochè il punto G ne cada al di dentro, ovvero al di fuori delle rette Vv , ed Xx . In ciascuno di questi casi, poniamo nel primo di essi, se mai il punto G ne cada dentro degli angoli APC , e DPB (*Fig. 57.*), sarà il rettangolo aGb , o il suo uguale cUd insieme col quadrato di g al quadrato di GS , come il quadrato di g al quadrato di N . Ma essendosi dimostrato di so-

pra il rettangolo cUd al rettangolo KUL come il quadrato di YZ al rettangolo di Vv, ed Xx, ossia per costruzione come il quadrato di g al quadrato di N, sarà ancora (12. El. V.) il rettangolo cUd insieme col quadrato di g al rettangolo KUL insieme col quadrato di N, come il quadrato di g al quadrato di N : adunque sarà il rettangolo cUd insieme col quadrato di g al rettangolo KUL insieme col quadrato di N, come lo stesso rettangolo cUd insieme col quadrato di g al quadrato di GS: e perciò sarà il rettangolo KUL insieme col quadrato di N uguale al quadrato di GS, ed il rettangolo KUL sarà uguale all'eccesso del quadrato di GS sul quadrato di N. E prendendo le differenze di queste quantità uguali, e dello stesso quadrato di SK, sarà il quadrato di US uguale al rettangolo KGL insieme col quadrato di N, e con ciò sarà il quadrato di US al quadrato di ST, come il rettangolo KGL insieme col quadrato di N allo stesso quadrato di ST. Ma pe' triangoli simili UST, e cPT il quadrato di US sta al quadrato di ST, come il quadrato di cP al quadrato di PT, ovvero per costruzione come il quadrato di N al quadrato di O. Dunque sarà ancora il rettangolo KGL insieme col quadrato di N al quadrato di ST, o della sua uguale GM, come il quadrato di N al quadrato di O, vale a dire il rettangolo KGL sarà minore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O, essen-

do il quadrato di N la data grandezza: quindi tirate dal punto G sulle AB , CD , ed EF le rette in paratesi GA , GC , e GE , sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo delle GA , e GC minore del quadrato di GE in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I , ed il quadrato di H ne sarà la data grandezza. Che se poi ne cada il punto G fuori degli angoli APC , e DPB (*Fig. 58.*), in tal caso argomentando come dianzi si rileverà il quadrato di SU uguale all' eccesso del quadrato di N sul rettangolo KGL , ed il rettangolo delle GA , e GC maggiore del quadrato di GE in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I , essendo il rettangolo delle GA , e GC minore della data grandezza, ossia del quadrato di H .

In secondo luogo il rettangolo delle rette in paratesi tirate dal punto in quistione sulle AB , e CD sia maggiore del quadrato della retta in paratesi tirata da quello stesso punto sulla EF in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I , essendo però quel rettangolo anche maggiore della data grandezza, ossia del quadrato di H , allora, se mai la cT sia parallela ad AB (*Fig. 56.*), si ritrovi la retta a , come si è detto di sopra, e presa nella retta PY , e da questa medesima parte la Yb , descrivasi la parabola bG . Si rileverà nello stesso modo essere l' eccesso del rettangolo KGL sul quadrato di N al quadrato di GM , come il quadrato di N al

quadrato di O , vale a dire il rettangolo KGL sarà maggiore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O , essendo il rettangolo KGL maggiore della data grandezza, ossia del quadrato di N : quindi tirate dal punto G sulle AB , CD , ed EF le rette in paratesi GA , GC , e GE sarà ancora il rettangolo delle GA , e GC maggiore del quadrato di GE in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I , ed il rettangolo delle GA , e GC sarà benanche maggiore della data grandezza, ossia del quadrato di H . Che se poi la cT non sia parallela ad AB , ma l'incontri nel punto X al di sopra del punto P (*Fig. 59.*), allora trovata la retta g , come si è detto, descrivasi per la proposizione seconda di questo porisma quella iperbole, nel di cui perimetro preso il punto G , e da esso tirate sulle date rette Vv , Xx , ed YZ le Ga , e Gb parallele ad YZ , e la GS parallela a Vv , e ad Xx , sia l'eccesso del rettangolo aGb sul quadrato di g al quadrato di GS , come il quadrato di g al quadrato di N , ed argomentando per la 19. dell' *El. V.* si rileverà similmente essere ancora l'eccesso del rettangolo KGL sul quadrato di N al quadrato di GM , come il quadrato di N al quadrato di O ; cioè a dire il rettangolo KGL sarà maggiore del quadrato di GM in quanto alla data ragione del quadrato di N al quadrato di O , essendo il rettangolo KGL maggiore della data grandezza,

ossia del quadrato di N. Laonde tirate dal punto G sulle AB, CD, ed EF le rette in paratesi GA, GC, e GE, sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo delle GA, e GC maggiore del quadrato di GE in quanto alla data ragione del quadrato di H al quadrato di I, ed il rettangolo delle GA, e GC sarà benanche maggiore della data grandezza, ossia del quadrato di H; e perciò G è il punto richiesto, e ne tocca le descritte curve. C. B. R.

LEMMA AL PORISMA SEGUENTE.

Sieno date di sito le quattro rette (*Fig. 6o.*) AB, CD, EF, e GH, a cui dal punto I sieno tirate le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG per modo, che il rettangolo di due di queste rette, poniamo delle IA, ed IC, sia minore, o maggiore del rettangolo delle rimanenti IE, ed IG in quanto alla data ragione de' quadrati delle rette K, ed L, essendo il quadrato di K la data grandezza: indi dallo stesso punto I si conducano sulle medesime rette AB, CD, EF, e GH le IM, IN, IO, ed IP, che facciano con quelle anche angoli dati; dico essere ancora il rettangolo MIN minore, o maggiore del rettangolo OIP in quanto ad una data ragione, e vice versa, se in quanto a questa data ragione il rettangolo MIN sia minore, o maggiore del rettangolo OIP, intendendosi già condotte le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG, dico essere benan-

che il rettangolo delle rette IA , ed IC minore , o maggiore del rettangolo delle rimanenti IE , ed IG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L .

Sia in primo luogo il rettangolo AIC minore del rettangolo EIG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L , sarà il rettangolo AIC insieme col quadrato di K al rettangolo EIG , come il quadrato di K al quadrato di L (*def. X. de' dati*). Ma essendo dati per ipotesi gli angoli IMA , ed IAM del triangolo IMA , sarà data la ragione di MI ad IA ; così pure essendo dati gli angoli INC , ed ICN del triangolo CIM , sarà data la ragione di IN ad IC : e quindi sarà benanche data la ragione del rettangolo MIN al rettangolo AIC , che pongasi uguale a quella de' quadrati delle date rette Q , e K . Similmente si dimostrerà essere il rettangolo EIG al rettangolo OIP in una data ragione , che facciasi uguale a quella de' quadrati delle date rette L , ed R . Ciò premesso, essendo per costruzione il rettangolo MIN al rettangolo AIC , come il quadrato di Q al quadrato di K , sarà (*12. El. V.*) il rettangolo MIN insieme col quadrato di Q al rettangolo AIC insieme col quadrato di K , come il quadrato di Q al quadrato di K . Ma per ipotesi il rettangolo AIC insieme col quadrato di K sta al rettangolo EIG , come il quadrato di K al quadrato di L , ed il rettangolo EIG sta al rettangolo OIP , come il quadrato di L al qua-

drato di R. Dunque sarà per egualità ordinata il rettangolo MIN insieme col quadrato di Q al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, vale a dire il rettangolo MIN sarà minore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, ed il quadrato di Q ne sarà la data grandezza.

In secondo luogo sia il rettangolo AIC maggiore del rettangolo EIG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L, sarà in tal caso la differenza del rettangolo AIC, e del quadrato di K al rettangolo EIG, come il quadrato di Q al quadrato di L; ed argomentando per la 19. dell' El. V., si rileverà similmente essere la differenza del rettangolo MIN, e del quadrato di Q al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, cioè a dire il rettangolo MIN sarà maggiore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, ed il quadrato di Q ne sarà la data grandezza.

Viceversa, sia in primo luogo il rettangolo MIN minore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R; dico essere benanche il rettangolo AIC minore del rettangolo EIG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L. Imperciocchè essendo per costruzione il rettangolo AIC al rettangolo MIN, come il quadrato di K al quadrato di Q, sarà (12. El. V.) il rettangolo AIC insieme col quadrato di K al rettangolo MIN in-

sime col quadrato di Q , come il quadrato di K al quadrato di Q . Ma per ipotesi il rettangolo MIN insieme col quadrato di Q sta al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R , e per costruzione il rettangolo OIP sta al rettangolo EIG, come il quadrato di R al quadrato di L . Dunque sarà per egualità ordinata il rettangolo AIC insieme col quadrato di K al rettangolo EIG, come il quadrato di K al quadrato di L , vale a dire il rettangolo AIC sarà minore del rettangolo EIG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L , ed il quadrato di K ne sarà la data grandezza.

In secondo luogo il rettangolo MIN suppongasì maggiore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R : dico essere ancora il rettangolo AIC maggiore del rettangolo EIG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L . Imperciocchè argomentando come dianzi, e per la 19. dell'El. V. si rileverà essere la differenza del rettangolo AIC, e del quadrato di K al rettangolo EIG, come il quadrato di K al quadrato di L , vale a dire il rettangolo AIC sarà anche maggiore del rettangolo EIG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L , ed il quadrato di K ne sarà la data grandezza.

COR. Essendo per costruzione il rettangolo MIN al rettangolo AIC, come il quadrato di Q al quadrato di K , ne siegue, che se il rettangolo MIN

sia minore, o maggiore del quadrato di Q, anche il rettangolo AIC sarà minore, o maggiore del quadrato di K (14. El. V.).

P O R I S M A VI.

Date di sito quattro linee rette , trovare un punto , dal quale condotte sulle date linee quattro rette in paratesi , sia il rettangolo di due di queste rette minore , o maggiore del rettangolo delle rimanenti in quanto ad una data ragione.

Sieno date di sito le quattro rette AB , CD , EF , e GH. Bisogna ritrovare il punto I, dal quale condotte sulle AB , CD , EF , e GH le rette in paratesi IA , IC , IE , ed IG , sia il rettangolo di due di queste rette , poniamo delle IA , ed IC , minore , o maggiore del rettangolo delle rimanenti IE , ed IG in quanto alla data ragione de' quadrati delle date rette K , ed L , ed il quadrato di K ne sia la data grandezza.

P R O P O S I Z I O N E I.

Sieno tra loro parallele le date rette AB , CD , EF , e GH (Fig. 61.). Bisogna ritrovare un punto , come si è detto dianzi.

Suppongasi essere I il punto richiesto , da cui si tirino sulle date rette le IM , IN , IO , ed IP parallele a qualunque data retta ST , che seghi le AB , CD , EF , e GH ne' punti T , U , V , ed X rispettivamente , sarà per l'anzidetto lemma il ret-

tangolo MIN anche minore, o maggiore del rettangolo OIP in quanto ad una data ragione, che rinveniasi uguale a quella dei quadrati delle date rette Q, ed R. Ciò premesso, si tiri dal punto I sulla retta TX la IS parallela alle AB, CD, EF, e GH, sarà chiaro a cagione de' parallelogrammi IT, IU, IV, ed IX, che il rettangolo MIN sia uguale al rettangolo TSU, ed il rettangolo OIP uguale al rettangolo VSX. Ma si è dimostrato il rettangolo MIN minore, o maggiore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R. Dunque in quanto a questa data ragione sarà pure il rettangolo TSU minore, o maggiore del rettangolo VSX. Ma è data la retta TX, ed in essa sono dati i punti T, U, V, ed X. Dunque sarà ancora dato il punto S; e quindi la SI, in cui ne giace il punto I, è una retta data di sito.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si tiri ovunque la retta ST, che seghi le date rette AB, CD, EF, e GH ne' punti T, U, V, ed X rispettivamente, e si esibisca, come si è detto, la ragione de' quadrati delle rette Q, ed R, ed il quadrato di Q sia la data grandezza: indi nella data retta ST, ed in essa i dati punti T, U, V, ed X, si ritrovi il punto S per modo, che il rettangolo TSU sia minore, o maggiore del rettangolo VSX in quanto alla data ragione del

quadrato di Q al quadrato di R (1). Ciò premesso, si tiri dal punto S la retta SI parallela alle AB, CD, EF, e GH; ed in essa si prenda un qualunque punto I, dal quale si conduca la retta MN parallela a TS, e che seghi le AB, CD, EF, e GH ne' punti M, N, O, e P rispettivamente. E poichè a cagione de' parallelogrammi IT, IU, IV, ed IX il rettangolo TSU è uguale al rettangolo MIN, ed il rettangolo VSX è uguale al rettangolo OIP, e per costruzione il rettangolo TSU è minore, o maggiore del rettangolo VSX in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, sarà ancora il rettangolo MIN minore, o maggiore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R. E quindi condotte dal punto S sulle AB, CD, EF, e GH le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG, sarà benanche per l'anzidetto lemma il rettangolo delle IA, ed IG minore, o maggiore del rettangolo delle IE, ed IG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L: e perciò G è il punto richiesto, e ne tocca la retta IS parallela alle AB, CD, EF, e GH. C. B. R.

(1) Vedi Simpson *de sectione determinata* lib. IV. Probl. I, II, e III.

PROPOSIZIONE II.

Sieno parallele le rette AB, e CD, su cui ne insistono i lati di uno de' rettangoli delle rette in paratesi, ed una delle due altre, poniamo la GH, interseghi le AB, e CD ne' punti S, e T rispettivamente (*Fig. 62, 63, 64, e 65.*). Bisogna ritrovare quel punto, che si è proposto di sopra.

Suppongasi essere I il punto richiesto, da cui si tirino sulle rette AB, CD, GH, ed EF le IM, ed IN parallele a GH, la IP parallela ad AB, e CD, e la IO parallela a GH, ovvero alle AB, e CD, secondochè queste rette sieno, o no parallele ad EF, sarà per lo lemma precedente il rettangolo MIN minore, o maggiore del rettangolo OIP in quanto ad una data ragione, che rinvergasi uguale a quella de' quadrati delle date rette Q, ed R, ed il quadrato di Q siane la data grandezza. Ciò premesso, sia in primo luogo (*Fig. 62, e 64.*) il rettangolo MIN minore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R; sarà in tal caso il rettangolo MIN insieme col quadrato di Q al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, e prendendo la MU nella retta MN per modo, che il rettangolo MUN sia uguale al dato quadrato di Q, saranno date di grandezza le due rette NU, ed UM per esserne data la MN, e tolta la NV, uguale alla MU, i punti U, e V, com'è chiaro,

ne toccheranno due rette date di sito UX, e VY parallele ad AB, e CD, ed il rettangolo MIN insieme col quadrato di Q sarà uguale al rettangolo UIV (*lem. I. prop. V. por. I.*): onde sarà ancora il rettangolo UIV al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R. Ma sono date di sito le quattro rette UX, VY, EF, e GH. Adunque il punto I per lo porisma terzo ne toccherà una data sezione conica.

In secondo luogo il rettangolo MIN (*Fig. 63, e 65.*) sia maggiore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, sarà in tal caso la differenza del rettangolo MIN e del quadrato di Q al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, e fatta la stessa costruzione, ed argomentando come dianzi si rileverà ancora essere il rettangolo VIU al rettangolo OIP nella data ragione del quadrato di Q al quadrato di R: onde il punto I per lo porisma terzo ne toccherà benanche una data curva conica.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si esibisca, come si è detto, la ragione de' quadrati di Q, e di R, e si prenda nella TS la SZ per modo, che il rettangolo TZS sia uguale al quadrato di Q, e tolta dalla TH la Tz uguale alla SZ, si tirino indefinitamente da' punti Z, e z le rette ZX, e zY parallele ad AB, e CD: indi essendo date di sito le quattro rette ZX, zY,

EF, e GH, delle quali le due prime sono tra loro parallele, ed una delle rimanenti, cioè la GH le intersega ne' punti Z, e z, si descriva per lo porisma terzo quella curva conica, nel di cui perimetro preso ad arbitrio il punto I, e tirate da esso sulle ZX, zY, GH, ed EF le rette IU, ed IV parallele a GH, la IP parallele ad AB, e CD, e la IO parallela a GH, ovvero alle AB, e CD, secondochè queste rette sieno, o no parallele ad EF, il rettangolo UIV stia al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R. Ciò posto, le rette IU, ed IV seghino le AB, e CD ne' punti M, ed N rispettivamente, ed il punto I (*Fig. 62, e 64.*) ne cada in primo luogo tra le rette AB, e CD, sarà in tal caso il rettangolo MIN insieme col rettangolo MUN, ovvero col quadrato di Q uguale al rettangolo UIV (*lem. I. prop. V. por. I.*). Ma per costruzione il rettangolo UIV sta al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R. Dunque sarà ancora il rettangolo NIM insieme col quadrato di Q al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, vale a dire il rettangolo NIM è minore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, ed il quadrato di Q n'è la data grandezza: onde tirate dal punto I sulle AB, CD, EF, e GH le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG, sarà ancora il rettangolo delle rette IA, ed IC minore del rettangolo delle IE, e IG in quanto alla data

ragione del quadrato di K al quadrato di L, ed il quadrato di K ne sarà la data grandezza.

In secondo luogo (*Fg. 63, e 65.*) il punto I ne cada al di fuori delle rette AB, e CD, allora sarà il rettangolo UIV uguale alla differenza del rettangolo NIM, e del rettangolo NUM, ovvero del quadrato di Q. Ma per costruzione il rettangolo UIV sta al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R. Dunque sarà ancora la differenza del rettangolo NIM, e del quadrato di Q al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, vale a dire il rettangolo MIN sarà maggiore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, ed il quadrato di Q ne sarà la data grandezza. Quindi tirate dal punto I sulle AB, CD, EF, e GH le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG, sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo delle IA, ed IC maggiore del rettangolo delle IE, ed IG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L, ed il quadrato di K ne sarà la data grandezza, che sarà maggiore, o minore del rettangolo delle IA, ed IC, secondochè il punto I ne cada tra le rette UX, e VY, ovvero al di fuori, perchè allora, com'è chiaro, il rettangolo MUN, ch'è uguale per costruzione al quadrato di Q, n'è anch'esso maggiore, o minore del rettangolo MIN. Laonde I è il punto richiesto, e ne tocca la descritta sezione conica.

C. B. R.

PROPOSIZIONE III.

Sieno tra loro parallele le rette AB , e GH , CD , ed EF , su cui ne insistono i lati IA , ed IG , IC , ed IE de' rettangoli AIC ; ed EIG delle rette in paratesi, e le CD , ed EF interseghino le AB , e GH ne' dati punti S , T , U , e V rispettivamente (*Fig. 66, 67, 68, 69, e 70.*). Bisogna ritrovare un punto, che abbia le condizioni esposte nel porisma.

Suppongasì essere I il punto richiesto, da cui si tirino sulle date rette AB , e GH le IM , ed IP parallele alle rette CD , ed EF , e sulle CD , ed EF si conducano le IN , ed IO parallele alle date rette AB , e GH , sarà per lo lemma precedente il rettangolo MIN anche minore, o maggiore del rettangolo OIP in quanto ad una data ragione, che rinvengasi uguale a quella de' quadrati delle date rette Q , ed R , ed il quadrato di Q siane la data grandezza. Ciò posto, sia in primo luogo il rettangolo MIN minore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R , sarà in tal caso il rettangolo MIN insieme col quadrato di Q al rettangolo OIP , come il quadrato di Q al quadrato di R , ed aggiunta per dritto alla PT la TX per modo, che il rettangolo STX sia uguale al dato quadrato di Q , sarà data la TX per esserne data di grandezza la TS , e compito il pa-

rallelogrammo TY, sarà, com'è chiaro, il parallelogrammo MN al parallelogrammo PO, come il rettangolo MIN al rettangolo OIP, ed il parallelogrammo TY al parallelogrammo IO, come il rettangolo STX, ovvero il quadrato di Q al rettangolo OIP. Dunque sarà ancora (24. *El. V.*) il parallelogrammo MN insieme col parallelogrammo TY al parallelogrammo PO, come il rettangolo MIN insieme col quadrato di Q al rettangolo OIP, ossia come il quadrato di Q al quadrato di R. Ora essendo di uguaglianza la ragione de' quadrati di Q, e di R (*Fig. 66.*), sarà in tal caso il parallelogrammo MN insieme col parallelogrammo TY uguale al parallelogrammo PO, e toltone di comune il parallelogrammo PN, resterà il parallelogrammo PY uguale al parallelogrammo TO, e reciprocando i loro lati, sarà TN, o la sua uguale IP a PX, come PM, o la sua uguale TS a TU, cioè in una data ragione; e perciò il punto I toccherà una retta data di sito.

Che se poi non sia di uguaglianza la ragione di Q ad R, ma una di queste rette, poniamo la Q, sia maggiore di R (*Fig. 69.*), in tal caso essendo il parallelogrammo MN insieme col parallelogrammo TY al parallelogrammo PO, come il quadrato di Q al quadrato di R, sarà ancora il parallelogrammo MN insieme col parallelogrammo TY maggiore del parallelogrammo PO: e prese nella TH le TZ, e ZU nella data ragione de' qua-

drati di Q, e di R, sarà ancora il parallelogrammo MN col parallelogrammo TY al parallelogrammo PO, come TZ ad UZ; e dividendo sarà l'eccesso de' parallelogrammi MN, e TY sul parallelogrammo PO, ossia l'eccesso del parallelogrammo PY sul parallelogrammo TO al parallelogrammo PO nella data ragione di TU ad UZ. Similmente presa nella retta XY la Xy quarta proportionale in ordine alle rette TU, UZ, ed XY, e compiti i parallelogrammi Py, ed Uz, sarà chiaro essere il parallelogrammo l'Y al parallelogrammo Py, come TU ad UZ, ovvero come il parallelogrammo TO al parallelogrammo Uz; e quindi avremo (19. El V.) l'eccesso del parallelogrammo PY sul parallelogrammo TO all'eccesso del parallelogrammo Py sul parallelogrammo Uz, come TU ad UZ, ovvero come lo stesso eccesso del parallelogrammo PY sul parallelogrammo TO al parallelogrammo PO; e perciò questo parallelogrammo PO ne pareggia l'eccesso del parallelogrammo Py sul parallelogrammo Uz, ed il solo parallelogrammo Py pareggerà i parallelogrammi PO, ed Uz pres' insieme, ossia tutto il parallelogrammo Pz. Per la qual cosa compito il parallelogrammo Px, il rettangolo di PX, o della sua uguale Ix, e della data retta Xy ne pareggerà ancora il rettangolo delle rette Iz, ed IP. Ma sono date di sito le rette Zz, GH, ed XY, delle quali le Zz, ed XY sono parallele, e la GH le intersega ne' punti Z, ed X rispet-

tivamente. Dunque il punto I per la proposizione terza del primo porisma ne toccherà una data iperbole.

In secondo luogo sia il rettangolo MIN (*Fig. 67, 68; 70, e 71.*) maggiore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R , sarà in tal caso la differenza del rettangolo MIN , e del quadrato di Q al rettangolo OIP , come il quadrato di Q al quadrato di R ; e presa sulla TP la TX come si è detto di sopra , si rileverà similmente essere ancora la differenza de' parallelogrammi TY , ed MN , ossia la differenza de' parallelogrammi PY , e PN al parallelogrammo IO , come il quadrato di Q al quadrato di R ; ed essendo di uguaglianza la ragione de' quadrati di Q , e di R (*Fig. 67, e 68.*), sarà del pari la differenza de' parallelogrammi PY , e PN uguale al parallelogrammo PO , e con ciò il parallelogrammo PY sarà uguale al parallelogrammo TO ; e reciprocando i loro lati sarà TN , o la sua uguale IP a PX , come PM , o la sua uguale TS a TU , cioè in una data ragione ; e perciò il punto I toccherà benanche una retta data di sito.

Che se poi non sia di uguaglianza la ragione di Q ad R , ma una di queste rette , poniamo la Q , sia maggiore di R (*Fig. 70, e 71.*), allora sarà la differenza de' parallelogrammi PY , e PN anche maggiore del parallelogrammo PO ; e prese parimenti nella TH le TZ , e ZU nella data ragione de' quadrati di Q , e di R , sarà pure la

differenza de' parallelogrammi PY, e PN al parallelogrammo PO, come TZ ad UZ, e dividendo sarà l' eccesso della differenza de' parallelogrammi PY, e PN sul parallelogrammo PO, ossia l' eccesso del parallelogrammo PY sul parallelogrammo TO al parallelogrammo PO nella data ragione di TU ad UZ: e ragionando come dianzi, si rileverà essere il rettangolo della Ix, e della data Xy benanche uguale al rettangolo delle rette Iz, ed IP; onde il punto I per la proposizione terza del primo porisma ne toccherà ancora una data Iperbole.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si ritrovi, come si è detto, la ragione de' quadrati delle rette Q, ed R, e tolta dalla TH la TX terza proporzionale in ordine alle rette ST, e Q, si compia il parallelogrammo TY, il di cui lato XY si prolunghi indefinitamente. Ciò posto, sia di uguaglianza in primo luogo la ragione de' quadrati delle rette Q, ed R, in tal caso (*Fig. 66, 67, e 68.*) dal punto X si tiri la XI parallela a TV, diagonale del parallelogrammo STUV, e da qualunque punto I preso in essa si conducano sulle AB, e GH le IM, ed IP parallele a CD, ed EF, e su di queste medesime rette le IN, ed IO parallele alle AB, e GH. E poichè sono simili i triangoli IPX, e TSV, com'è chiaro, sarà PX ad IP, o alla sua uguale NT, come SV a TS, ovvero prendendo le di

loro uguali, come TU ad XY, e con ciò il parallelogrammo PY sarà uguale al parallelogrammo TO, ed aggiuntovi di comune il parallelogrammo PN, se mai il punto I ne cada dentro l'angolo GTD (*Fig. 66.*), sarà allora il parallelogrammo MN insieme col parallelogrammo TY uguale al parallelogrammo PO. Ma il parallelogrammo MN sta al parallelogrammo PO, come il rettangolo MIN al rettangolo OIP, ed il parallelogrammo TY sta al parallelogrammo PO, come il rettangolo STX, ovvero il quadrato di Q, che gli è uguale per costruzione, al rettangolo OIP. Dunque avremo (*24. El. V.*) il parallelogrammo MN insieme col parallelogrammo TY al parallelogrammo PO, come il rettangolo MIN insieme col quadrato di Q al rettangolo OIP; onde sarà ancora il rettangolo MIN insieme col quadrato di Q uguale al rettangolo OIP del pari, che il quadrato di Q per ipotesi è uguale al quadrato di R, vale a dire il rettangolo MIN sarà minore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, ed il quadrato di Q ne sarà la data grandezza: quindi tirate dal punto I sulle AB, CD, EF, e GH le rette in parentesi IA, IC, IE, ed IG, sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo AIC minore del rettangolo EIG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L, ed il quadrato di K ne sarà la data grandezza. Che se poi il punto I (*Fig. 67.*) ne cada dentro l'an-

golo DTU, in tal caso togliendo di comune il parallelogrammo PN dagli uguali parallelogrammi PY, e TO, si avrà l'eccesso del parallelogrammo PY sul parallelogrammo PN, ossia l'eccesso del parallelogrammo TY sul parallelogrammo MN uguale al parallelogrammo PO; e ragionando nello stesso modo dianzi si rileverà l'eccesso del quadrato di Q sul rettangolo MIN uguale al rettangolo OIP del pari, che il quadrato di Q per ipotesi è uguale al quadrato di R, vale a dire il rettangolo MIN sarà maggiore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, ed il rettangolo MIN sarà minore della data grandezza, o sia del quadrato di Q: laonde tirate dal punto I sulle AB, CD, EF, e GH le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG, sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo AIC maggiore del rettangolo EIG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L, ed il rettangolo AIC sarà benanche minore della data grandezza, ossia del quadrato di K. Finalmente se il punto I ne cada dentro l'angolo UXY (*Fig. 68.*), allora si avrà l'eccesso del parallelogrammo MN sul parallelogrammo TY uguale al parallelogrammo PO, ed argomentando nello stesso modo, si rileverà il rettangolo AIC maggiore del rettangolo EIG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L, ed il rettangolo AIC maggiore della data grandezza, o sia del quadrato di K.

In secondo luogo (*Fig. 69, 70, e 71.*) non sia di uguaglianza la ragione del quadrato di Q al quadrato di R, ma uno di essi sia il maggiore, poniamo il quadrato di Q, in tal caso prendasi nella retta TU la UZ, cosicchè stia TZ a ZU, come il quadrato di Q al quadrato di R, e dal punto Z si tiri la Zz parallela alle EF, XY, e CD: similmente nella retta XY prendasi la Xy quarta proporzionale in ordine alle rette TU, UZ, ed XY; indi essendo date di sito le tre rette Zz, XY, e GH si ritrovi per la proposizione terza del primo porisma quella iperbole, nel di cui perimetro preso ad arbitrio il punto I, e tirate da esso sulle Zz, XY, e GH le rette Iz, ed Ix parallele a GH, e la IP parallela a Zz, e ad XY, sia il rettangolo zIP uguale al rettangolo della Ix, e della data retta Xy, e le Iz, ed Ix ne seghino le EF, e CD ne' punti O, ed N rispettivamente. E poichè il rettangolo zIP è uguale per costruzione al rettangolo della Ix, ovvero PX, e della Xy, sarà il parallelogrammo Py uguale al parallelogrammo Pz (23. *El. VI.*), e toltone di comune il parallelogrammo Uz, resterà l'eccesso del parallelogrammo Py sul parallelogrammo Uz uguale al parallelogrammo PO. Ma essendo per costruzione XY ad Xy, come TU ad UZ, sarà ancora il parallelogrammo PY al parallelogrammo Py, come il parallelogrammo TO al parallelogrammo Uz. Adunque per la 19. dell' *El. V.* sarà l'eccesso del parallelogrammo PY sul pa-

rallelogrammo TO all'eccesso del parallelogrammo Py sul parallelogrammo Uz, ossia al parallelogrammo PO, che gli è uguale, come il parallelogrammo TO al parallelogrammo Uz, ovvero come TU ad UZ, e componendo sarà l'eccesso de' parallelogrammi PY, e PO sul parallelogrammo TO al parallelogrammo PO, come TZ a ZU, ovvero per costruzione come il quadrato di Q al quadrato di R. Ciò premesso, il punto I cada primieramente dentro l'angolo GTD (*Fig. 69.*), sarà in tal caso l'eccesso de' parallelogrammi PY, e PO sul parallelogrammo TO uguale, com'è chiaro, ai parallelogrammi pres' insieme MN, e TY: onde sarà ancora il parallelogrammo MN insieme col parallelogrammo TY al parallelogrammo PO, come il quadrato di Q al quadrato di R. Ma il parallelogrammo MN sta al parallelogrammo PO, come il rettangolo MIN al rettangolo OIP, ed il parallelogrammo TY sta al parallelogrammo PO, come il rettangolo STX, ovvero il quadrato di Q, che gli è uguale per costruzione, al rettangolo OIP: dunque sarà ancora (*24. El. V.*) il rettangolo MIN insieme col quadrato di Q al rettangolo OIP, come il parallelogrammo MN insieme col parallelogrammo TY al parallelogrammo PO, ossia come il quadrato di Q al quadrato di R, vale a dire, il rettangolo MIN sarà minore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, ed il quadrato di Q ne sarà la data grandezza. Laonde

tirate dal punto I sulle AB, CD, EF, e GH le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG, sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo AIC minore del rettangolo EIG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L, ed il quadrato di K ne sarà la data grandezza. Che se poi il punto I (*Fig. 70.*) nè cada dentro l'angolo DTZ, allora sarà l'eccesso de' parallelogrammi PY, e PO sul parallelogrammo TO uguale, con'è chiaro, all'eccesso del parallelogrammo PY sul parallelogrammo PN, ovvero all'eccesso del parallelogrammo TY sul parallelogrammo NM. Dunque sarà del pari l'eccesso del parallelogrammo TY sul parallelogrammo NM al parallelogrammo PO, come il quadrato di Q al quadrato di R, ed argomentando come dianzi si rileverà ancora l'eccesso del rettangolo STX, ovvero del quadrato di Q sul rettangolo MIN al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, cioè a dire il rettangolo MIN sarà maggiore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, ed il rettangolo MIN sarà minore della data grandezza, ossia del quadrato di Q. Quindi tirate dal punto I sulle AB, CD, EF, e GH le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG, sarà pure il rettangolo AIC maggiore del rettangolo EIG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L, ed il rettangolo AIC sarà anche minore della data grandezza, ossia del quadrato di K.

Finalmente cadendo il punto I dentro l'angolo UTS, (*Fig. 71.*) si concluderà in simil guisa essere l'eccesso del rettangolo MIN sul quadrato di Q al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, vale a dire il rettangolo MIN sarà maggiore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, ed il rettangolo MIN sarà maggiore della data grandezza, o sia del quadrato di Q: quindi tirate dal punto I sulle AB, CD, EF, e GH le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG, sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo AIC maggiore del rettangolo EIG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L, ed il rettangolo AIC sarà benanche maggiore della data grandezza, ossia del quadrato di K; e perciò I è il punto richiesto, e ne tocca le divise linee. C. B. R.

PROPOSIZIONE IV.

Le tre rette AB, CD, e GH s'interseghino ne' punti S, T, ed U rispettivamente, e la EF seghi le AB, e CD, su cui ne insistono i lati di uno de' rettangoli delle rette in paratesi ne' punti V, e v, ovvero ne seghi una di esse, poniamo la AB, nel punto V (*Fig. 72, 73, 74, 75, e 76.*). Bisogna ritrovare quel punto, che abbia le condizioni esposte nel porisma.

Suppongasi essere I il punto richiesto, da cui si tirino sulle rette AB, e CD le IM, ed IN pa-

rallele a GH , e sulle EF , e GH le IO , ed IP
 parallele ad AB , sarà per lo lemma precedente
 il rettangolo MIN anche minore , o maggiore del
 rettangolo OIP in quanto ad una data ragione ,
 che rinvergasi uguale a quella de' quadrati delle
 date rette Q , ed R , ed il quadrato di Q siane la
 data grandezza : indi condotta dal punto T la
 TX. parallela alle rette OP , ed AB , che ne incontri
 la retta MN nel punto X , sarà data la ragione di
 TX , ovvero della sua uguale PI ad XN a ca-
 gione del triangolo TXN dato di specie. Adunque
 presa la OY nella retta IO per modo , che il ret-
 tangolo di MI , ed XN stia al rettangolo di IP , ed
 OY nella data ragione del quadrato di Q al qua-
 drato di R , sarà data benanche (*prop. 68. de' dati*)
 la ragione di OY ad IM , o alla sua uguale
 VZ , intendendosi compito il parallelogrammo MZ .
 Ma è data ancora la ragione di VZ a VO per
 essere dato di specie il triangolo VZO . Dunque
 sarà anche data la ragione di OY ad OV , e per-
 chè n' è dato l'angolo YOY compreso dalle rette
 OY , ed OV , congiunta la VY , ne sarà anche
 dato di magnitudine l'angolo OVY , e per esserne
 dato il punto V , e la retta VO la VY sarà an-
 che data di sito . Ciò premesso , sia in primo luogo
 il rettangolo MIN (*Fig. 72 , e 73 .*) minore del ret-
 tangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato
 di Q al quadrato di R , sarà in tal caso il rettangolo
 MIN insieme col quadrato di Q al rettangolo OIP ,
 come il quadrato di Q al quadrato di R . Ma

in questa ragione l'è anche il rettangolo di MI, ed XN al rettangolo di PI, ed OY: dunque sarà ancora il rettangolo MIN insieme col quadrato di Q al rettangolo OIP, come il rettangolo di MI, ed XN al rettangolo di PI, ed OY: e con ciò sarà il rettangolo MIX insieme col quadrato di Q al rettangolo PIY, come il quadrato di Q al quadrato di R, e prendendo la aM nella retta XM per modo, che il rettangolo XaM sia uguale al dato quadrato di Q, saranno date di grandezza le due rette Xa, ed aM per esserne data la MX, e tolta la Xb uguale alla aM, i punti a, e b, com'è chiaro, ne toccheranno due rette date di sito ac, e bd parallele ad AB, e TX, ed il rettangolo MIX insieme col quadrato di Q sarà uguale al rettangolo bla (*lem. I. prop. V. por. I.*): onde sarà ancora il rettangolo bla al rettangolo PIY, come il quadrato di Q al quadrato di R. Ma sono date di sito le quattro rette ac, bd, GH, e VY: dunque il punto I per lo porisma terzo ne toccherà una data sezione conica.

In secondo luogo il rettangolo MIN (*Fig. 75, e 76.*) sia maggiore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, sarà in tal caso la differenza del rettangolo MIN, e del quadrato di Q al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, ed argomentando come dianzi, e fatta la stessa costruzione, si rileverà ancora il rettangolo bla al rettangolo PIY,

come il quadrato di Q al quadrato di R ; onde il punto I per lo porisma terzo ne toccherà benanche una data sezione conica.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si ritrovi, come si è detto, la ragione de' quadrati delle rette Q , ed R , e da' punti T , e V tirate le rette TX , e VZ parallele alle AB , e GH , si prenda nella TS la Se per modo, che il rettangolo Tes sia uguale al quadrato di Q , e tolta dalla TG la Tf uguale alla Se , si conducano da' punti e , ed f le rette ec , ed fd parallele ad AB , e che seghino le EF , e CD ne' punti g , ed h rispettivamente: indi dalla retta VA si tagli la Vk tale, che il quadrato di Tf stiane al rettangolo di fh , e Vk , siccome il quadrato di Q al quadrato di R , ed unita la retta Kg si compia il parallelogrammo $VkgI$, il di cui lato VI prodotto quanto si voglia ne seghi la retta fd nel punto n . Finalmente essendo date di sito le quattro rette ac , bd , VI , e GH , delle quali le due prime sono tra loro parallele, ed una delle rimanenti, cioè la GH le intersega ne' punti e , ed f , si descriva per lo porisma terzo quella sezione conica, nel di cui perimetro preso ad arbitrio il punto I , e da questo tirate sulle ac , e bd le Ia , ed Ib parallele a GH , e sulle VI , e GH le IY , ed IP parallele ad ac , e bd , sia il rettangolo bla al rettangolo YIP , come il quadrato di Q al quadrato

di R, e compiti i parallelogrammi Mm, ed MZ, la retta IY incontri la EF nel punto O, e le rette Ia, ed Ib seghino le AB, TX, e CD ne' punti M, X, ed N rispettivamente. E poichè a cagione de' triangoli simili VZO, e Vmg, VOY, e Vgl VZ, o la sua uguale IM sta a VO, come Vm a Vg, e VO ad OY, come Vg a gl, sarà per equalità ordinata IM ad OY, come Vm a gl, ovvero prendendo le loro uguali come Tf a Vk. Ma per gli altri triangoli simili NXT, e Tfh NX sta a TX, ovvero alla sua uguale IP, come Tf ad fh. Dunque sarà ancora (23. El. VI.) il rettangolo di MI, ed NX al rettangolo di OY, ed IP, come il quadrato di Tf al rettangolo di fh, e Vk, ossia per costruzione come il quadrato di Q al quadrato di R. Ciò posto, il punto I ne cada in primo luogo dentro il triangolo TSU, ovvero dentro l'angolo EVA: nel primo caso (Fig. 72.) sarà il rettangolo XIM insieme col rettangolo XaM, ovvero col quadrato di Q uguale al rettangolo bla (*lem. I. prop. V. por. I.*). Ma per costruzione il rettangolo bla sta al rettangolo YIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, ovvero come il rettangolo di MI, ed XN al rettangolo di OY, ed IP. Dunque sarà ancora il rettangolo XIM insieme col quadrato di Q al rettangolo YIP, come il rettangolo di MI, ed XN al rettangolo di OY, ed IP; e con ciò sarà il rettangolo MIN insieme col quadrato di Q al rettangolo OIP, come il qua-

drato di Q al quadrato di R, vale a dire il rettangolo MIN sarà minore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, ed il quadrato di Q ne sarà la data grandezza. Nel secondo caso, se mai il punto I stiane tra le rette AB, e TX (*Fig. 73.*), allora si concluderà nello stesso modo, che il rettangolo MIN sia anche minore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, e che il quadrato di Q ne sia la data grandezza. Che se poi il punto I (*Fig. 74.*) ne cada fuori delle rette AB, e TX, allora sarà la differenza del quadrato di Q, e del rettangolo XIM uguale al rettangolo bIa (*lem. I. prop. V. por. I.*), ed al pari di questo rettangolo sarà ancora la differenza del quadrato di Q, e del rettangolo XIM al rettangolo YIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, ovvero come il rettangolo di MI, ed XN al rettangolo di OY, ed IP: onde sarà benanche il rettangolo MIN insieme col quadrato di Q al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, ch'è quanto a dire il rettangolo MIN sarà minore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, ed il quadrato di Q ne sarà la data grandezza: quindi (*Fig. 72, 73, e 74.*) tirate dal punto I sulle AB, CD, EF, e GH le rette in paratesi IA, IC, IE ed IG, sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo AIC minore del rettangolo EIG in quanto alla data ragione del

quadrato di K al quadrato di L, ed il quadrato di K ne sarà la data grandezza.

In secondo luogo ne cada il punto I dentro di uno de' tre angoli AVF, HSU, ed UTG; ovvero tra le rette EF, e GH: cadendo in uno de' detti angoli, poniamo nell'angolo UTG (*Fig. 75.*), sarà la differenza del rettangolo XaM, ovvero del quadrato di Q, e del rettangolo XIM uguale al rettangolo bIa (*lem. I. prop. V. per I.*); ed argomentando come dianzi, si rileverà l'eccesso del quadrato di Q sul rettangolo MIN al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, vale a dire il rettangolo MIN sarà maggiore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, ed il rettangolo MIN sarà minore della data grandezza, ossia del quadrato di Q. Laonde tirate dal punto I sulle AB, CD, EF, e GH le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG, sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo AIC maggiore del rettangolo EIG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L, ed il rettangolo AIC sarà anche minore della data grandezza, ossia del quadrato di K. Che se poi il punto I ne cada tra le rette EF, e GH (*Fig. 76.*); allora si rileverà in simil guisa l'eccesso del rettangolo MIN sul quadrato di Q al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, vale a dire il rettangolo MIN sarà maggiore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, ed il ret-

tangolo MIN sarà maggiore della data grandezza, ossia del quadrato di Q: quindi tirate dal punto I sulle AB, CD, EF, e GH le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG, sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo AIC maggiore del rettangolo EIG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L, ed il rettangolo AIC sarà benanche maggiore della data grandezza, ossia del quadrato di K; e perciò I è il punto richiesto, e ne tocca la descritta sezione conica.
C. B. R.

P R O P O S I Z I O N E . V.

Le tre rette AB, CD, e GH si uniscano nello stesso punto S, e la EF segghi le AB, e CD, su cui ne insistono i lati di uno de' rettangoli delle rette in paratesi ne' punti V, e v rispettivamente, ovvero ne segghi una di esse, poniamo la AB nel punto V (*Fig. 77, 78, 79, 80, ed 81.*). Bisogna ritrovare quel punto, che si è proposto di sopra.

Suppongasi essere I il punto richiesto, da cui si tirino sulle rette AB, e CD le IM, ed IN parallele a GH, e sulle EF, e GH le IO, ed IP parallele ad AB, sarà per lo lemma precedente il rettangolo MIN anche minore, o maggiore del rettangolo OIP in quanto ad una data ragione, che rinvergasi uguale a quella de' quadrati delle date rette Q, ed R, ed il quadrato di Q siane la data grandezza: e perchè il triangolo SMN è

dato di specie, sarà data la ragione di SM , ovvero della sua uguale PI ad MN : quindi presa la OY nella retta IO per modo, che il rettangolo di MI , ed MN stia al rettangolo di PI , ed OY , nella data ragione del quadrato di Q al quadrato di R , sarà data benanche la ragione di OY ad MI , o alla sua uguale VZ , intendendosi compito il parallelogrammo MZ : ma è data ancora la ragione di VZ a VO per essere dato di specie il triangolo VZO . Dunque sarà anche data la ragione di OY ad OV , e perchè n'è dato l'angolo YOV compreso dalle rette OY , ed OV , congiunta la VY , ne sarà anche dato di magnitudine l'angolo OVY , e per esserne dato il punto V , e la retta VO la VY sarà anche data di sito. Ciò premesso, sia in primo luogo il rettangolo MIN (*Fig. 77, 78, e 79.*) minore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R , sarà in tal caso il rettangolo MIN insieme col quadrato di Q al rettangolo OIP , come il quadrato di Q al quadrato di R . Ma in questa ragione l'è anche il rettangolo di MI , ed MN al rettangolo di PI , ed OY : dunque sarà ancora il rettangolo MIN insieme col quadrato di Q al rettangolo OIP , come il rettangolo di MI , ed MN al rettangolo di PI , ed OY , e con ciò sarà la differenza del quadrato di MI , e del quadrato di Q al rettangolo YIP , come il quadrato di Q al quadrato di R , e prendendo nella MN d' ambe le parti del punto M le Ma , ed Mb , ciascuna uguale alla data

retta Q , i punti a , e b , com'è chiaro; ne toccheranno due rette date di sito ac , e bd parallele ad AB , e la differenza del quadrato di MI , e del quadrato di Q sarà uguale al rettangolo bla ; onde sarà ancora il rettangolo bla al rettangolo YIP , come il quadrato di Q al quadrato di R . Ma sono date di sito le quattro rette ac , bd , VY , e GH , delle quali ac , e bd sono parallele, e vengono segate dalle rimanenti VY , e GH . Dunque il punto I per la proposizione seconda del terzo porisma ne toccherà una data sezione conica.

In secondo luogo il rettangolo MIN (*Fig. 8a.*) sia maggiore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R , sarà in tal caso la differenza del rettangolo MIN , e del quadrato di Q al rettangolo OIP , come il quadrato di Q al quadrato di R , ed argomentando come dianzi, e fatta la stessa costruzione, si rileverà ancora il rettangolo bla al rettangolo YIP , come il quadrato di Q al quadrato di R ; onde il punto I per la proposizione seconda del terzo porisma ne toccherà benanche una data sezione conica.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si ritrovi, come si è detto, la ragione de' quadrati delle rette Q , ed R , e dal punto V tirata la VZ parallela a GI , si prendano in questa retta d' ambe le parti del punto S le Se , ed Sf ,

ciascuna uguale a Q, e da' punti e, ed f si conducano le rette ec, ed fd parallele ad AB, e che seghino le EF, e CD ne' punti g, ed h rispettivamente: indi dalla retta VA si tagli la Vk terza proporzionale in ordine alle rette fh, ed R, ed unita la retta Kg si compia il parallelogrammo VkgI, il di cui lato VZ prodotto quanto si voglia ne seghi la retta fd nel punto n. Finalmente essendo date di sito le quattro rette ec, fd, VZ, e GH, delle quali le ec, ed fd sono parallele, e vengono segate dalle VZ, e GH ne' punti l, n, f, ed e rispettivamente, si descriva per la proposizione seconda del terzo porisma quella sezione conica, nel di cui perimetro preso ad arbitrio il punto I, e da questo tirate sulle ec, ed fd le Ia, ed Ib parallele a GH, e sulle VZ, e GH le IY, ed IP parallele ad ec, ed fd, sia il rettangolo bla al rettangolo YIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, e compiti i parallelogrammi Mm, ed MZ, la retta IY incontri la EF nel punto O, e le rette Ia, ed Ib seghino le AB, e CD ne' punti M, ed N rispettivamente. E poichè a cagione de' triangoli simili VZO, e Vmg, VOY, e Vgl, VZ o la sua uguale MI sta a VO, come Vm a Vg, e VO ad OY, come Vg a gl, sarà per equalità ordinata MI ad OY, come Vm a gl, ovvero prendendo le loro uguali come Sf a Vk. Ma per gli altri triangoli simili NMS, ed Sfh, MN sta ad MS, ovvero alla sua uguale IP, come Sf ad fh: dunque sarà ancora (23. El. VI.) il rettangolo di MI, ed MN al rettangolo di OY,

ed IP, come il quadrato di Sf al rettangolo di fh, e Vk, ossia per costruzione come il quadrato di Q al quadrato di R. Ciò posto, il punto I (Fig. 77, 78, e 79.) ne cada in primo luogo dentro l'angolo BSD, ovvero dentro l'angolo EVA: in entrambi questi casi sarà la differenza del quadrato di MI, e del quadrato di Ma, ovvero del quadrato di Q uguale al rettangolo bla. Ma per costruzione il rettangolo bla sta al rettangolo YIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, ovvero come il rettangolo di MI, ed MN al rettangolo di OY, ed IP. Dunque sarà ancora la differenza del quadrato di MI, e del quadrato di Q al rettangolo YIP, come il rettangolo di MI, ed MN al rettangolo di OY, ed IP; e con ciò sarà il rettangolo MIN insieme col quadrato di Q al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, vale a dire il rettangolo MIN sarà minore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, ed il quadrato di Q ne sarà la data grandezza; quindi tirate dal punto I sulle AB, CD, EF, e GH le rette in-paratesi IA, IC, IE, ed IG sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo AIC minore del rettangolo EIG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L, ed il quadrato di K ne sarà la data grandezza.

In secondo luogo ne cada il punto I dentro di uno de' tre angoli AVF, HSD, e BSG, ovvero tra le rette EF, e GH: cadendo in uno de' detti an-

goli, poniamo nell'angolo BSG (*Fig. 80.*); allora argomentando, come dianzi, si rileverà l'eccesso del quadrato di Q sul rettangolo MIN al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, vale a dire il rettangolo MIN sarà maggiore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, ed il rettangolo MIN sarà minore della data grandezza, ossia del quadrato di Q. Laonde tirate dal punto I sulle AB, CD, EF, e GH le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG, sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo AIC maggiore del rettangolo EIG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L, ed il rettangolo AIC sarà anche minore della data grandezza, ossia del quadrato di K. Che se poi il punto I ne cada tra le rette EF, e GH (*Fig. 81.*), allora si rileverà in simil-guisa l'eccesso del rettangolo MIN sul quadrato di Q al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, vale a dire il rettangolo MIN sarà maggiore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, ed il rettangolo MIN sarà maggiore della data grandezza, ossia del quadrato di Q; quindi tirate dal punto I sulle AB, CD, EF, e GH le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG, sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo AIC maggiore del rettangolo EIG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L, ed il rettangolo AIC sarà benanche mag-

giore della data grandezza, ossia del quadrato di K; e perciò I è il punto richiesto, e ne tocca la descritta sezione conica. C. B. R.

PROPOSIZIONE VI.

Le date rette AB, CD, EF, e GH si uniscano nello stesso punto S (*Fig. 82, 83, 84, 85, ed 86.*). Bisogna ritrovare quel punto, che si è proposto nel porisma.

Suppongasi essere I il punto richiesto, da cui si tirino sulle date rette AB, e CD le IM, ed IN parallele a GH, e sulle EF, e GH le IO, ed IP parallele ad AB, sarà per lo lemma precedente il rettangolo MIN anche minore, o maggiore del rettangolo OIP in quanto ad una data ragione, che rinvergasi uguale a quella de' quadrati delle date rette Q, ed R, ed il quadrato di Q siane la data grandezza: e perchè il triangolo SMN è dato di specie, sarà data la ragione di SM, ovvero della sua uguale PI ad MN; e quindi presa la OY nella retta IO per modo, che il rettangolo di MI, ed MN stia al rettangolo di IP, ed OY nella data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, ne sarà data benanche (*pr. 68. de' dati.*) la ragione di OY ad MI, o alla sua uguale SP. Ma è data ancora la ragione di SP ad SO per essere dato di specie il triangolo SPO. Dunque sarà data ancora la ragione di OY ad OS; e perchè n' è dato l'angolo YOS

compreso dalle rette OY, ed OS, congiunta la SY, sarà anche dato di magnitudine l'angolo OSY, e per essere dato il punto S, e la retta SO, la SY sarà anche data di sito. Ciò posto, sia in primo luogo il rettangolo MIN (*Fig. 82, 83, ed 84.*) minore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, sarà in tal caso il rettangolo MIN insieme col quadrato di Q al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R. Ma in questa ragione l'è anche il rettangolo di MI, ed MN al rettangolo di PI, ed OY. Dunque sarà ancora il rettangolo MIN insieme col quadrato di Q al rettangolo OIP, come il rettangolo di MI, ed MN al rettangolo di PI, ed OY, e con ciò sarà la differenza del quadrato di MI, e del quadrato di Q al rettangolo YIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, e prendendo nella MN d'ambe le parti del punto M le Ma, ed Mb, ciascuna uguale alla data retta Q, i punti a, e b, com'è chiaro, ne toccheranno due rette date di sito ac, e bd parallele ad AB, e la differenza del quadrato di MI, e del quadrato di Q sarà uguale al rettangolo bla: onde sarà ancora il rettangolo bla al rettangolo YIP, come il quadrato di Q al quadrato di R. Ma sono date di sito le quattro rette ac, bd, GH, ed SY, delle quali ac, e bd sono parallele, e vengono segate dalle rimanenti GH, ed SY: dunque per la proposizione seconda del terzo porisma il punto I ne toccherà una data sezione conica.

In secondo luogo il rettangolo MIN (*Fig. 85, ed 86.*) sia maggiore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, sarà in tal caso la differenza del rettangolo MIN, e del quadrato di Q al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, ed argomentando come dianzi, e fatta la stessa costruzione, si rileverà ancora il rettangolo bla al rettangolo YIP, come il quadrato di Q al quadrato di R; onde il punto I per la proposizione seconda del terzo porisma ne toccherà benanche una data sezione conica.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si ritròvi, come si è detto, la ragione de' quadrati delle rette Q, ed R, e prese nella GH d' ambe le parti del punto S le Se, ed Sf, ciascuna uguale a Q, da' punti e, ed f si conducano le rette ec, ed fd parallele ad AB, e che seghino le EF, e CD ne' punti g, ed h rispettivamente: indi dalla retta SA si tagli la Sk terza proporzionale in ordine alle rette fh, ed R, ed unita la retta kg si compia il parallelogrammo Skgl, il di cui lato Sl prodotto quanto si voglia ne seghi la retta fd nel punto n. Finalmente essendo date di sito le quattro rette ec, fd, Sl, e GH, delle quali ec, ed fd sono parallele, e vengono segate dalle Sl, e GH ne' punti l, n, e, ed f rispettivamente, si descriva per la proposizione seconda del terzo porisma quella sezione conica, nel di

cui perimetro preso ad arbitrio il punto I, e da questo tirate sulle ec, ed fd le Ia, ed Ib parallele a GH, e sulle Sl, e GH le IY, ed IP parallele ad ec, ed fd, sia il rettangolo bla al rettangolo YIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, e la retta IY incontri la EF nel punto O, e le rette Ia, ed Ib seghino le AB, e CD ne' punti M, ed N rispettivamente. E poichè a cagione de' triangoli simili SPO, ed Seg, SOy, ed Sgl, SP o la sua uguale MI sta ad SO, come Se ad Sg, ed SO ad OY, come Sg a gl, sarà per equalità ordinata MI ad OY, come Se a gl, o alla sua uguale Sk. Ma per gli altri triangoli simili NMS, ed Sfh MN sta ad MS, o alla sua uguale IP, come Sf ad fh. Dunque sarà ancora (23. El. VI.) il rettangolo di MI, ed MN al rettangolo di OY, ed IP, come il quadrato di Sf al rettangolo di fh, ed Sk, ossia per costruzione come il quadrato di Q al quadrato di R. Ciò posto, il punto I ne cada in primo luogo dentro l'angolo BSD, ovvero dentro l'angolo ESA: in entrambi questi casi (Fig. 82, 83, e 84.) sarà la differenza del quadrato di MI, e del quadrato di Ma, ovvero del quadrato di Q uguale al rettangolo bla. Ma per costruzione il rettangolo bla sta al rettangolo YIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, ovvero come il rettangolo di MI, ed MN al rettangolo di OY, ed IP. Dunque sarà ancora la differenza del quadrato di MI, e del quadrato di Q al rettangolo YIP, come il rettangolo di MI, ed MN al rettangolo di OY, ed IP;

e con ciò sarà il rettangolo MIN insieme col quadrato di Q al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, vale a dire il rettangolo MIN sarà minore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, ed il quadrato di Q ne sarà la data grandezza: quindi tirate dal punto I sulle AB, CD, EF, e GH le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG, sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo AIC minore del rettangolo EIG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L, ed il quadrato di K ne sarà la data grandezza.

In secondo luogo il punto I ne cada in uno de' tre angoli ASF, HSD, e BSG, ovvero tra le rette EF, e GH: cadendo in uno de' detti angoli, poniamo nell' angolo BSG (*Fig. 85.*), allora argomentando come dianzi si rileverà l' eccesso del quadrato di Q sul rettangolo MIN al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, vale a dire il rettangolo MIN sarà maggiore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, ed il rettangolo MIN sarà minore della data grandezza, ossia del quadrato di Q. Laonde tirate dal punto I sulle AB, CD, EF, e GH le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG, sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo AIC maggiore del rettangolo EIG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L, ed il rettangolo AIC sarà anche minore della data grandezza, ossia del quadrato

di K. Che se poi il punto I ne cada tra le rette EF, e GH (*Fig. 86.*), allora si rileverà in simil guisa l'eccesso del rettangolo MIN sul quadrato di Q al rettangolo OIP, come il quadrato di Q al quadrato di R, vale a dire il rettangolo MIN sarà maggiore del rettangolo OIP in quanto alla data ragione del quadrato di Q al quadrato di R, ed il rettangolo MIN sarà maggiore della data grandezza, ossia del quadrato di Q: quindi tirate dal punto I sulle AB, CD, EF, e GH le rette in paratesi IA, IC, IE, ed IG, sarà ancora per lo lemma precedente il rettangolo AIC maggiore del rettangolo EIG in quanto alla data ragione del quadrato di K al quadrato di L, ed il rettangolo AIC sarà benanche maggiore della data grandezza, ossia del quadrato di K; e perciò I è il punto richiesto, e ne tocca la descritta sezione conica. C. B. R.

S G O L I O.

Questi sei porismi contengono i rapporti delle rette in paratesi, che nella risoluzione de' problemi piani, e solidi potranno mai emergere dallo sviluppo delle condizioni locali de' loro punti di riduzione (*P. I. §. 13.*), di maniera che nel luogo risoluto essi sono a guisa di tanti generi, a cui si riducono i particolari problemi come altrettante di loro specie, nel che tutto consiste il magistero analitico del metodo degli Antichi. E sebbene i Moderni

anche ne riducono i detti problemi alla costruzione dell'equazioni indeterminate di secondo grado, pure queste non esprimono generalmente i rapporti delle rette in paratesi, ma soltanto alcune di loro specie assai limitate, e ristrette. La qual cosa si rileverà di leggieri sol, che si dimostri come negli esposti porismi contengasi eminentemente la costruzione dell'equazioni, a cui si rapportano i moderni Geometri nella risoluzione de' problemi. Pertanto prendasi a costruire l'equazione generale di secondo grado, che si suol proporre in questa forma $y^2 + Axy + By = Cx^2 + Dx + E$, ove le A, B, C, D , ed E possono essere qualunque grandezze positive, o negative, e per l'omogeneità de' termini i coefficienti A , e C ne dinotano dati numeri, ossia dati rapporti all'unità, le B , e D ne indicano date rette, ed E un dato spazio, e le x , ed y n'esprimono le coordinate del punto in quistione, che poniamo (*Fig. 87.*) essere il punto A , rapportato alle date direttrici CB , e CD mediante le rette AB , ed AD parallele rispettivamente a CD , ed a CB , delle quali la AD , o la sua uguale BC sia dinotata dalla x , e la AB dalla y . Cio posto, è chiaro, che la data equazione sia la stessa, che la $y (y + Ax + B) = x (Cx + D) + E$, i di cui membri, se ben si riflette, ne indicano appunto i rapporti delle rette in paratesi, e basta il rilevarle queste, perchè poi dagli esposti porismi ne resti la data equazione costruita immediatamente. Così per far vedere il

progresso di questa facilissima operazione aggiun-
 gasi per dritto alla AB la $BE = Ax$, se mai
 questo coefficiente A sia positivo, e vi si tolga
 da quella, essendo esso negativo. E poichè $CB:$
 $BE::x:Ax::1:A$, cioè in una data ragione, e
 per essere ancora dato l'angolo CBE compreso
 dalle rette CB, e BE unita la CE, sarà anche
 dato l'angolo BCE, e con ciò la CE sarà data
 di sito. Similmente alla BE si aggiunga per dritto,
 o pure si tolga da essa la $EF = B$, secondochè
 questo coefficiente sia positivo, o negativo, e per-
 chè la EF ne pareggia una retta data, e forma
 dati angoli con la data retta CE, il di lei estremo
 F ne toccherà ancora la retta FG data di sito, e
 parallela a CE, e sarà $AF = y + Ax + B$, ed il
 rettangolo delle due rette in paratesi AB, ed
 AF sarà indicato appunto dal primo membro della
 data equazione, cioè da $y^2 + Axy + By$. Così
 pure intendendosi condotta dal punto A sulla
 data retta CD la $AH = Cx$, sarà $AH : AD ::$
 $Cx : x :: C : 1$, che l'è per ipotesi una ragion
 data; ma n'è dato l'angolo ADH: dunque ne
 sarà anche dato l'angolo AHD; ed aggiunta alla
 AH per dritto, ovvero tolta da essa la $HK = D$,
 secondochè questo coefficiente sia positivo, o ne-
 gativo, l'estremo K, com'è chiaro, ne toccherà
 ancora la retta KL data di sito, e parallela a
 CH, onde sarà $AK = Cx + D$, e formando an-
 goli dati colla data retta LK sarà ella anche una
 retta in paratesi al pari della retta AD, e con

ciò il rettangolo delle due KA , ed AD una col dato spazio E sarà dinotato dal secondo membro dell' equazione proposta , ossia da $Cx^2 + Dx + E$: e quindi il rettangolo delle KA , ed AD , ed il dato spazio E ne pareggeranno il rettangolo delle AB , ed AF ; onde per costruire la data equazione non si deve fare altro, se non che ritrovare il punto A , da cui tirate sulle rette date di sito KL , CD , CB , e GF le rette in paratesi AK , AD , AB , ed AF sia il rettangolo KAD maggiore, o minore del rettangolo BAF in quanto ad una data ragione, secondochè sia positiva, o negativa la data grandezza , che in questo caso n'è dinotata dallo spazio E, e la ragion data n'è di uguaglianza; la qual ricerca trovasi già eseguita nella proposizione terza del sesto porisma, mentre due delle date direttrici , cioè le KL , e CD sono tra loro parallele : così ancora per le proposizioni particolari degli altri porismi si troverà benanche la linea, che ne tocca il punto in questione , allorchè nell' equazione proposta vi manchino i termini By, Cx, e Dx, o tutt'insieme, o alcuni di essi, ne' quali casi restringesi il numero delle rette in paratesi. Ed ecco come la costruzione della proposta equazione generale, e quindi di tutte quelle altre equazioni particolari, che da' particolari problemi potranno mai emergere, si contiene in quella degli esposti porismi ; di maniera che tutte queste equazioni, in che si riducono i problemi nel metodo de' Moderni non

sono , che tante determinate specie de' rapporti delle rette in paratesi , in che si riducono nel metodo degli Antichi. E però questo metodo è tanto più universale, e più facile di quello, quanto è più universale , e più facile a ravvisarsi il genere , che la specie. Ma quello poi , ch' è sommanente da notarsi si è , che nel metodo de' Moderni si dovranno mai sempre costruire, e dimostrare geometricamente quell' equazioni , che si ritraggono da' particolari problemi; lo che nè obbliga a tante operazioni, che il più delle volte come abbiamo divisato altrove (*P. I. §. 24.*), non si possono quasi eseguire. E sebbene una tale costruzione potrebbesi agevolare grandemente in virtù de' detti porismi, pure per determinarvi quelle rette in paratesi , che in se nascondono l' equazioni , vi si dovranno mai sempre costruire le algebriche formole , che spesso fiate, rendonsi laboriosissime , e tediosissime. Ma che si dirà poi del rapporto delle rette in paratesi , che in questo metodo de' Moderni si è trasformato in una equazione , che sovente ne altera il grado del problema ? Allora in quanti imbarazzi non si ritrovano gli Analisti nel dover mettere in opera i loro metodi di eliminazione , i quali quanto sieno talvolta duri , e malagevoli non vi è chi l' ignora ? Al contrario è solo pregio privativo del metodo degli Antichi il preservarne da cotesti laberinti di eliminazioni , e di costruzioni Geometriche , poichè in esso non si riducono i pro-

blemi alle specie , ma bensì ai loro generi , per cui vi basta il solo rapporto delle rette in paratesi , mentre queste non si debbono restringere alle sole x , ed y , come usan fare i Moderni , nè i loro rapporti vi si debbono trasformare in equazioni , o queste poi maneggiarsi , o costruirsi altrimenti , essendosi già essi costruiti , e dimostrati in tutta la loro estensione negli esposti Porismi ; lo che certamente è un vantaggio senza pari , che ne rende questo metodo degli Antichi di gran lunga superiore a quello de' Moderni . Ma egli è ormai tempo d' inoltrarmi nella terza parte a percorrere cotesta via reggia dell' analisi degli Antichi , onde mostrare col fatto quanto per essa rendasi facile , e spedita la risoluzione de' problemi .

DIVINAZIONE
SULLA
GEOMETRIA ANALITICA
DEGLI ANTICHI

P A R T E T E R Z A .

Applicazione dell' esposto metodo analitico degli Antichi alla risoluzione di varj Problemi.

P R O B L E M A I .

Dato un qualunque angolo rettilineo, dividerlo in tre parti uguali.

SIA dato (*Fig. 88.*) qualunque angolo rettilineo ABC; bisogna dividerlo in tre parti uguali.

Suppongasi effettuato il problema , o ch' è lo stesso . suppongonsi tirate dal vertice B del dato angolo ABC le rette BD, e BE per modo , che sieno uguali gli angoli ABD, DBE, ed EBC; e de-

★

scritto col centro B, e con qualunque intervallo BA il cerchio ADEC, che segghi i lati BA, BD, BE, e BC degli angoli ABD, DBE, ed EBC ne' punti A, D, E, e C rispettivamente, sarà manifesto essere uguali gli archi AD, DE, ed EC, su cui ne insistono essi angoli ABD, DBE, ed EBC, come ancora le corde AD, DE, ed EC de' medesimi archi: quindi aggiunto di comune DE agli uguali archi EC, ed AD, sarà anche l'arco CD uguale all'arco AE, e l'angolo DAC uguale all'angolo ECA (27. *El. III.*). Ma *sj* è dimostrata la corda AD uguale alla corda EC: dunque sarà la DE parallela alla AC, e però abbassata dal punto B la BFG perpendicolare alle rette AC, e DE, queste ne saranno bisecate da quella ne' punti F, e G del pari, che il dato angolo ABC; onde la BG ne sarà data di sito. Ciò premesso, essendo DE, ovvero AD doppia di DG, sarà il quadrato di AD quadruplo del quadrato di DG, e prodotto il raggio AB, finchè incontri nel punto H la circonferenza del cerchio ADEC, e tirata la DI perpendicolare ad AH, sarà il quadrato di AD uguale al rettangolo HAI, ovvero al rettangolo di AH, e DK, intendendosi compito il parallelogrammo DKAI. Adunque sarà benanche il rettangolo di AH, e DK quadruplo del quadrato di DG. Ma le rette AK, e BG sono date di sito, e le DK, e DG sono rette in paratesi tirate su di esse dal punto D, ed il diametro. AH è dato di grandezza: dunque il punto D (*sc. prop. II. por. I.*)

sarà ad una data parabola ; ma n'è ancora alla data circonferenza del cerchio ADEC. Dunque il punto D sarà dato.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Col centro B, e con qualunque intervallo BA si descriva il cerchio ADEC, che seghi i lati del dato angolo ABC ne' punti A, e C rispettivamente: indi si unisca la retta AC, cui si abbassi dal punto B la perpendicolare BF, che incontri nel punto L la retta AL perpendicolare ad AB. Finalmente si descriva la parabola DLC, di cui il punto L sia il vertice, la retta LB il diametro, la LM metà di LB ne sia il parametro, e le ordinate al diametro LB sieno parallele ad AL. E poichè la retta AL tocca il cerchio ADEC nel punto A, e la parabola DLC nel punto L, sarà manifesto, che la parabola DLC segherà il cerchio ADEC dalla parte dell'angolo BLA in due punti D, e D'. Ma il quadrato di AC è quadruplo del quadrato di CF per essere AC doppia di CF, ed il quadrato di AC, compito il parallelogrammo CNAO, è uguale, com'è chiaro, (*cor. prop. VIII. El. VI.*) al rettangolo HAO, ovvero al rettangolo di AH, e CN: dunque sarà ancora il rettangolo di AH, e CN quadruplo del quadrato di CF; e con ciò presa la LR metà di AB, ossia quarta parte del diametro ABH, sarà ancora il quadrato di CF uguale al rettangolo di CN, ed

LR. Inoltre compito il parallelogrammo CPLQ , sarà pe' triangoli simili CFQ , CNP , e BAL , CF a CQ , come CN a CP , ovvero ad LQ , e CF a CQ , come BA a BL , ovvero prendendo le loro metà , come LR ad LM : dunque sarà ancora il quadrato di CF al quadrato di CQ , come il rettangolo di CN , ed LR al rettangolo QLM. Ma si è dimostrato il quadrato di CF uguale al rettangolo di CN , ed LR : dunque sarà il quadrato di CQ uguale al rettangolo QLM , e quindi la CQ sarà la semiordinata corrispondente all' ascissa LQ nella parabola DLC , la quale perciò dovrà incontrare il cerchio ADEC nel punto C. Ma la congiungente LC , com'è chiaro , ne tocca il cerchio ADEC , e ne sega la parabola DLC : dunque questa curva dovrà ancora segare il detto cerchio nel punto C ; ma la parabola DLC ne sega il cerchio ADEC dalla parte dell' angolo BLA ne' punti D , e D' : dunque la parabola DLC segando dalla parte dell'angolo BLP il cerchio ADEC nel punto C , dovrà ancora segarlo dall' istessa parte in un'altro punto D'' (*pr. 25. Lib. IV. Con. di Apoll.*). Ciò posto , prendasi qualunque de' punti D , D' , e D'' , poniamo il punto D , da cui tirata al punto A la DA , e la DG perpendicolare a BF , e compiti i parallelogrammi DKAI , e DSLT , si rileverà come dianzi essere il rettangolo di DK , ed LR al rettangolo TLM , come il quadrato di DG al quadrato di DT. Ma il quadrato di DT a cagione della parabola DLC ne pareggia il ret-

angolo TLM: dunque anche il rettangolo di DK, ed LR ne pareggerà il quadrato di DG. Ma il rettangolo di DK, ovvero di AI, ed AH è quadruplo del rettangolo di DK, ed LR per essere AH quadruplo di LR: dunque sarà aneora il rettangolo HAI, ovvero il quadrato di AD quadruplo del quadrato di DG, e con ciò AD doppia di DG, ed uguale a DE; ma DE è parallela ad AC: dunque sarà anche AD uguale ad EC; e quindi le tre corde AD, DE, ed EC saranno uguali tra loro del pari, che i loro archi AD, DE, ed EC, e con ciò saranno anche uguali gli angoli ABD, DBE, ed EBC. C. B. F.

COR. Quindi ben si vede, che nel problema della trisezione dell'angolo ABC (*Fig. 89.*) vi sono tre punti di riduzione, che n'effettuano il quesito, cioè i punti D, D', e D'' segnati dalle intersezioni della parabola DLC, e della circonferenza del cerchio ADEC; dappoichè tirate in questo cerchio da ciascuno di que' punti le corde DE, D'E', e D''E'' parallele ad AC, ed unite le rette BD, e BE, BD', e BE', BD'', e BE'' ne risultano uguali non solo gli archi AD, DE, ed EC, AD', D'E', ed E'C, AD'', D''E'', ed E''C, ma ancora gli angoli ABD, DBE, ed EBC, ABD', D'BE', ed E'BC, ABE'', D''BE'', ed E''BC. Vale a dire la trisezione del dato angolo ABC si riduce a questo problema generale, cioè a *tirare due rette dal vertice B del dato angolo ABC, sicchè l'angolo compreso tra loro sia*

*uguale a quello, che ciascuna di esse ne forma col lato corrispondente dell'angolo dato: il qual problema, come abbiamo veduto, si può risolvere in tre diversi modi, appunto perchè le rette richieste possono avere tre differenti posizioni; ed è poi facile a rilevare, che allora si trisecherà il dato angolo, quando le due rette ne cadono dentro di esso, e cadendone al di fuori si avranno le terze parti della somma, o della differenza di quattro retti, e dell'angolo dato, secondochè questo sia, o no compreso dall'angolo, che ciascuna delle rette in quistione forma col lato corrispondente dell'angolo proposto. Similmente la trisezione del dato arco di cerchio AEC si riduce al seguente problema generale, cioè *dato l'arco AEC nella periferia del cerchio ACH, assegnare in essa due punti, talchè la loro distanza sia uguale a quella, che ciascuno serba dall'estremo corrispondente dell'arco dato: il qual problema si può anche fare in tre differenti maniere, mentre questi punti richiesti si possono prendere dentro del dato arco, nel qual caso si avranno le terze parti di esso, ovvero al di fuori, ed allora si otterranno le terze parti della somma, o della differenza della periferia del cerchio, e del dato arco, secondochè questo sia, o no compreso da ciascuno de' punti addimandati, e dall'estremo corrispondente dell'arco proposto.**

RISOLUZIONE DELL' ESPOSTO PROBLEMA
PER MEZZO DELL' ELLISSE.

Premesse le medesime cose dell' analisi precedente, (*Fig. 90.*) si tiri dal punto E il diametro EK, e si congiunga la DK, che sarà perpendicolare alle rette ED, ed AC; indi si abbassi dal centro B la BI perpendicolare a DK, che la bisecherà nel punto I, e ne sarà data di sito. E poichè il quadrato di ED è uguale al quadrato di DA, ossia a' quadrati di AH, ed HD, aggiuntovi di comune il quadrato di DK, sarà il quadrato di EK uguale ai quadrati di AH, di HD, e di DK presi insieme: quindi presa AL uguale, e per dritto ad AF, si compia il parallelogrammo FM, il di cui lato LM è dato di sito, e poi al quadrato di EK, ed ai quadrati di AH, di HD, e di DK, che dianzi gli si sono mostrati uguali, aggiungansi rispettivamente gli uguali rettangoli GDM, ed FHL, sarà il quadrato di EK una col rettangolo GDM uguale ai quadrati di AF, di HD, e di DK pres' insieme. Ma il quadrato di DH è uguale all' eccesso de' quadrati di DI, ed IH sul doppio rettangolo DIH (7. *El. II.*). Dunque sarà ancora il quadrato di EK una col rettangolo GDM uguale all' eccesso de' quadrati di DI, di AB, e di DK sul doppio rettangolo DIH per esserne i quadrati di AF, ed IH uguali al quadrato di AB; onde toltine rispettivamente gli uguali quadrati di AB,

e di BK, resterà, com'è chiaro, il triplo quadrato di BE insieme col rettangolo GDM uguale all'eccesso de' quadrati di DK, e DI sul doppio rettangolo DIH. Ma i quadrati di DK, e DI presi insieme sono quintupli del quadrato di DI per essere DK doppia di DI: dunque sarà ancora il triplo quadrato di EB insieme col rettangolo GDM uguale all'eccesso del quintuplo quadrato di DI sul doppio rettangolo DIH. Laonde tolta dalla retta IH la IN per modo, che il doppio rettangolo DIH sia il quintuplo del rettangolo DIN, sarà ancora (19. *El. V.*) l'eccesso del quintuplo quadrato di DI sul doppio rettangolo DIH anche il quintuplo dell'eccesso del quadrato di DI sul rettangolo DIN; e prendendo i loro uguali, sarà pure il triplo quadrato di EB insieme col rettangolo GDM quintuplo del rettangolo IDN. Ma essendo per costruzione il doppio rettangolo DIH quintuplo del rettangolo DIN, sarà ancora la doppia IH quintupla della IN; e quindi sarà questa retta al pari di quella anche data di grandezza; onde l'estremo N toccherà la retta NO data di sito, e parallela alla retta BI. Inoltre le DI, e DN, com'è chiaro, sono rette in paratesi tirate dal punto D sulle rette BI, ed NO date di sito, e tra loro parallele, come ancora sono rette in paratesi le DG, e DM tirate dallo stesso punto D sulle rette BG, ed LM anche date di sito, e tra loro parallele, e di più si è dimostrato il rettangolo GDM insieme col triplo quadrato di BE essere il quintuplo

del rettangolo IDN, vale a dire (*scol. por. III.*) il rettangolo delle rette in paratesi DG, e DM esser minore del rettangolo delle rette in paratesi DI, e DN in quanto ad una data ragione. Adunque il punto D per la proposizione terza del sesto porisma ne sarà ad una data ellisse. Ma il punto D n'è ancora alla data circonferenza del cerchio ADEC: dunque il punto D sarà dato.

Intanto descritta cotesta curva, la composizione del problema n'è poi di per se manifesta.

RIDUZIONE DELLO STESSO PROBLEMA

SECONDO GLI ANTICHI.

Sia ABC il dato angolo (*Fig. 91, 92, e 93.*), di cui supponiamo essere CBD la terza parte, e preso ad arbitrio il punto A nel lato AB dell'angolo ABC, si tiri da esso la retta AE parallela a BC, che scghi nel punto D la retta BD, sarà l'angolo CBD uguale all'angolo ADB (*29. El. I.*). Ma l'angolo ABD è doppio dell'angolo DBC, essendo questo per ipotesi terza parte di tutto l'angolo ABC: dunque sarà ancora l'angolo ABD doppi dell'angolo ADB. Ora essendo in primo luogo retto il dato angolo BC (*Fig. 91.*), sarà in tal caso anche retto l'angolo BAD; e perciò bisecata la BD nel punto F, il semicerchio, che intendasi descritto col centro F, e coll'intervallo FD, ne passerà, com'è chiaro, non solo pe' punti B, e D, ma ancora pel punto A, e la congiungente FA sarà uguale alla FD; quindi l'angolo AFB del pari, che

l'angolo ABD sarà doppio dell'angolo ADB ; e con ciò saranno uguali gli angoli ABF, ed AFB, ed il lato AF sarà uguale al lato AB, e la BD doppia della AB. Ma AB è data di grandezza: dunque ne sarà anche data la BD, ed il punto D ne toccherà una data circonferenza di cerchio; onde in tal caso si riduce il problema ad *adattare tra i lati del dato angolo BAD la retta BD doppia di BA, e che passi pel dato punto B*, lo che facilmente si esegue per mezzo del cerchio. Ma se poi il dato angolo ABC sia obbliquo (Fig. 92, e 93.), allora dal punto A si abbassi AF perpendicolare a BC, che seghi la BD nel punto G, e compito il parallelogrammo AEBF si bisechi la DG nel punto H; e perchè n'è retto l'angolo GAD, si rileverà, come dianzi, la congiungente AH essere uguale alla DH; e quindi l'angolo AHG del pari, che l'angolo ABD sarà doppio dell'angolo ADB; onde saranno uguali gli angoli AHG, ed ABD interni, ovvero esterni del triangolo HAB, secondochè il dato angolo ABC siane acuto, ovvero ottuso, ed in entrambi questi casi sarà sempre il lato AH uguale al lato AB, e con ciò DG doppia di AB. Ma AB è data di grandezza, e la DG ne tende al dato punto B. Dunque il problema della trisezione dell'angolo obbliquo ABC si riduce a *tirare dall'angolo B del dato parallelogrammo rettangolo AEBF la retta BD, sicchè la DG, che resta tra i lati AE, ed AF opposti all'angolo B, sia doppia della data*

retta AB, o ch'è lo stesso il detto problema si riduce ad applicare tra i lati del dato angolo FAD la DG, che sia doppia di AB, e che passi pel dato punto B: ove è da notarsi, che questo punto ne cade al di fuori, ovvero al di dentro del dato angolo FAD, secondochè l'angolo ABC siane acuto, ovvero ottuso, e ne caderà poi nel lato AB dell'angolo ABC, quante volte l'angolo ABC sia retto (Fig. 91.). Vale a dire qualunque sia l'angolo da trisecarsi, questo problema si ridurrà sempre ad applicare tra i lati di un dato angolo una retta, che sia data di grandezza, e che passi per un punto dato. Non di meno da questa generale riduzione sembrami, che Pappo ne avesse voluto escludere l'angolo retto, e l'angolo ottuso, dappoichè egli nellà proposizione XXXII. del Libro IV. delle sue Collezioni Matematiche per trisecare il primo de' detti angoli ne ricorre alla bisezione dell'angolo del triangolo equilatero, e per trisecarne il secondo è costretto a prendere le terze parti dell'angolo retto, e dell'angolo acuto, in ch'ei ne risolve l'angolo proposto. Intanto cotesto problema, cui si riduce la trisezione dell'angolo obbliquo, sarà in seguito risoluto nella proposizione seconda per mezzo dell'iperbole alla maniera degli Antichi, siccome l'abbiamo da Pappo; tanto più, che alcuni Analisti moderni dietro le orme del Cavalier Newton han preteso di ridurre ad esso tutt'i problemi solidi, non considerando che le specie si debban rapportare non già ad un'altra specie, ma bensì al loro genere.

RIDUZIONE DELLO STESSO PROBLEMA
SECONDO ARCHIMEDE.

Sia AEC il dato angolo (*Fig. 94.*), di cui ABD suppongasi essere la terza parte, e descritto col centro B, e con qualunque intervallo BA il cerchio ADCE, che seghi i lati degli angoli ABD, e DBC ne' punti A, D, e C rispettivamente, s' inclini dal punto D sul diametro EBA la DF per modo, che sia DF uguale al raggio DB, sarà l'angolo DFB uguale all'angolo DBA, e prolungata la retta FD finchè incontri la circonferenza in G, ed unita la BG, sarà l'angolo BDG, o il suo uguale BGF doppio dell'angolo BFG. Ma per ipotesi l'angolo DBC è doppio dell'angolo ABD; dunque sarà l'angolo BGF uguale all'angolo DBC, ed aggiuntivi rispettivamente gli angoli uguali DFB, e DBA, saranno gli angoli BGF, e DFB uguali al dato angolo ABC. Ma l'angolo esterno GBE del triangolo GBF ne pareggia gli stessi angoli BGF, e DFB presi insieme. Dunque sarà l'angolo GBE uguale al dato angolo ABC, e con ciò sarà dato il punto G. Vale a dire la trisezione dell'angolo ABC si riduce a questo problema, cioè *ad inclinare dal dato punto G nella circonferenza del cerchio ADCE la retta GDF sul diametro EA, sicchè la parte FD tra la circonferenza, ed il diametro siane uguale al raggio*: il qual problema si risolverà in seguito

nella proposizione terza per mezzo dell'iperbolè, se pure non vogliasi a tal uopo adoperare la concoide, come piacque al Principe de' Geometri.

S C O L I O.

La composizione di questo problema per mezzo della parabola ho voluto recarla a disteso, ed indipendentemente dal primo porisma, affinchè per tal modo stabiliti coi semplici elementi i tre punti di riduzione, che ci offre la trisezion dell'angolo, potessi con tal principio dimostrare il detto problema essere di natura solido, ossia ch' ci non si possa affatto risolvere colla retta, e col cerchio; e ciò senza mica ricorrere a quell'apparato di algebriche ragioni, che sogliono piuttosto involuppare la mente de' giovani, i quali poi reudonsi non poco molesti ai Geometri, sembrando loro un paradossò assai strano *il non potersi mai giungere colla riga, e col compasso a trisecare un' angolo rettilineo, ovvero l' arco circolare, che il misura*, mentr' essi d' altronde con tal'istrumenti l' eseguono tuttora, ed in facil modo. Ma stando eglino ai primi principj dell' analisi geometrica, e sapendo per avventura, che in tutt' i geometrici problemi si debbono assegnare i punti di riduzione non già a tentoni, ovvero a caso, ma bensì dall' analizzare le proprietà de' detti punti rilevarne le debite locali, come ho dimostrato ampiamente nella prima parte

di quest' opera , stando dico a questi principj di analisi, non mi sarà difficile far loro intendere cotesto geometrico paradosso ragionando in questa guisa.

Tutta la difficoltà di trisecare il dato angolo ABC (*Fig. 68.*), ovvero l' arco circolare AEC, che il misura, si riduce a trovare il punto D nella circonferenza del cerchio ADEC per modo , che la corda DA sia uguale alla corda DE parallela alla AC, o ch'è lo stesso la distanza DA, che il punto D tiene dal punto A, sia doppia di DG distanza, ch' ei tiene dalla data retta BF, che ne biseca il dato angolo ABC. Ciò posto , il punto D non si può assegnare a caso , ovvero a tentoni , ma bensì mediante una linea, che seghi precisamente la circonferenza nel punto D in quistione , e perciò questa linea affinchè sia geometricamente assegnabile , dee avere i suoi convenevoli determinanti , o vogliam dire la sua *proprietà caratteristica*, che analizzando il problema si dovrà derivare dalle condizioni locali del punto D. Ora se in questo analitico sviluppo non siesi tenuto conto che della sola condizione delle distanze , che dee avere il punto D , allora non solo il punto dell' intersezione di essa linea col cerchio ne darà AD doppia di DG, ma sibbene ogni altro punto preso ad arbitrio nel suo perimetro , e perciò essa sarà, com'è chiaro , una data iperbole avente A per un suo umbilico (1). Ma se poi

(1) Vedi prop. CCXXXVI. Lib. VII. *Coll. Mat.* di Pappo.

la proprietà caratteristica di quella linea, che ne risolve un tal problema, siasi non solo derivata dalla condizione delle distanze, che dee avere il punto D, ma aneora dall' altra condizione di essere, cioè, un punto della circonferenza del cerchio ADEC, allora si otterrà una linea, che nella sola intersezione col dato cerchio ADEC ne darà AD doppia di DG, variando essa nella posizione, e nella specie, secondochè ne variano le condizioni locali del punto D. In fatti tenendosi conto delle proprietà del cerchio, che si convengono ad ogni punto della sua periferia, e quindi anche al punto D in quistione, come a cagion di esempio, che il quadrato di AD sia uguale al rettangolo del diametro AH, e della DK abbassata perpendicolarmente dal punto D ad AL tangente del cerchio nel punto A, e questa condizione si combini con quella delle distanze, cioè che AD sia doppia di DG, ovvero che il quadrato di AD sia quadruplo del quadrato di DG, si rileverà immantinente essere il rettangolo di DK, ed AH anche quadruplo del quadrato di DG, che l'è una proprietà caratteristica di una data parabola (*scol. prop. II. por. I.*), ed il punto dell' intersezione di essa, e del cerchio ADEC, cioè il punto D ne darà AD doppia di DG. Che se poi si consideri essere ancora la congiunta DC doppia della DI tirata perpendicolarmente dal punto D sulla BA del pari, che la AD sia doppia di DG, onde il rettangolo ADC n'è quadruplo del

rettangolo IDG, e poi per la natura del cerchio ADEC al rettangolo ADC si sostituisca il rettangolo del diametro di esso cerchio, e della DV perpendicolare ad AC abbassatale dal punto D, ne risulterà ancora questo stesso rettangolo anche quadruplo del rettangolo IDG, che l'è una proprietà caratteristica di una data Iperbole (*pro. V. por. I.*). Così ancora inclinando dal punto D sulla BA la DU uguale al raggio DB del cerchio ADEC si rileverà col Principe de' Geometri, che questa inclinata DU passi per un punto dato nella circonferenza del cerchio ADEC; lo che ne mostra, che il punto D si appartenga ad una data concoide, sebbene questa proprietà, che ne rinvenne Archimede, esprimendosi per mezzo delle rette in paratesi tirate dal punto D (1), che l'è certamente la maniera più scmplice di ridurre in ultim'analisi ogni condizione, che può risultare al punto D, si troverà ancora, che un tal punto si appartenga ad un'altra iperbole; e s'intenderà bene, che il punto D, ove questa iperbole non meno, che quella concoide sega la circonferenza del cerchio ADEC, ne darà AD doppia di DG. In somma qualunque sieno le condizioni apposte al punto D, che possan mai cadere in mente del Geomctra, che imprende a risolvere un tal problema, basta però, ch'ci le combini colla condizione delle distanze, che il punto D dee avere dal punto A, e dalla retta BF,

(1) Vedi in seguito il problema terzo.

n' emergerà una proprietà caratteristica di una data linea, che ove interseghi la circonferenza del cerchio ADEC, poniamo nel punto D, là ne risulta AD doppia di DG, altrimenti non si effettuerebbe il quesito. Intanto non è il solo punto D, che ne risolve il problema, come abbiamo dimostrato, ma ve ne sono i due altri D', e D'': dunque lo stesso sviluppo di analisi, che si è fatto pel punto D, si farà ancora per ciascuno di questi due punti, che hanno le medesime condizioni del punto D; onde otterremo quell'istessa proprietà caratteristica, che si è ottenuta pel punto D; e quindi la stessa linea, che ne segna il punto D, ne segnerà ancora i punti D', e D'', e dovrà ancora segnarne il punto C; il quale sebbene non cada in quistione, pure avendo esse le stesse proprietà, che ciascuno de' punti D, D', e D'', cioè a dire, che la distanza CA dal punto A sia doppia della distanza CF, ch'ei ha dalla BF, perciò quell'istessa linea, che segna i punti D, D', e D'', dovrà segnarne ancora il punto C, come in fatti si può osservare in tutte le linee, che si sono finora escogitate nella risoluzione di questo problema. Ma qualunque sieno coteste linee, non potranno mai essere nè una retta, nè una circonferenza di cerchio, non potendo queste linee, come ha dimostrato Euclide, segare un cerchio in più di due punti; e però non si potrà mai trisecare colla retta, e col cerchio un qualunque angolo rettilineo ABC.

Ho detto un qualunque angolo rettilineo, affinchè nell'analisi di un tal problema non tengasi conto della grandezza di esso; altrimenti si potrebbe dare, che la sua terza parte, cioè l'angolo ABD sia la metà di un angolo dato. Così essendo retto l'angolo ABC, sarà l'angolo ABD metà di un angolo del triangolo equilatero, e ne sarà poi la quarta parte, l'ottava parte, la sedicesima parte, ec. secondochè il dato angolo ABC sia uguale alla metà, alla quarta parte, all'ottava parte, ec. dell'angolo retto, come pure, se il dato angolo ABC sia uguale a sei quinte parti di un retto, allora la sua terza parte ABD sarebbe per avventura uguale all'angolo verticale di quel triangolo isoscele, che ne descrive Euclide nel quarto degli Elementi per modo, che ciascun angolo alla base sia doppio dell'angolo al vertice, e di questo angolo poi ne sarà ABD la metà, la quarta parte, l'ottava parte ec. secondochè l'angolo ABC sia anche esso la metà, la quarta parte, l'ottava parte ec. di quell'angolo, ch'è sei quinte parti di un retto. Ma in tutti cotesti infiniti angoli, che ne restano geometricamente trisecati, il punto D di riduzione dipende non già dall'essere AD doppia di DG, ma dalla particolare grandezza dell'angolo ABC; lo che ne riduce il problema della trisezione dell'angolo ABC a quello della bisezione di un'angolo dato, che l'è un problema elementare. Al contrario proponendosi a trisecare un qualunque angolo ABC, in tal caso non si potrà tener

conto di questa, o di quell'altra grandezza particolare dell'angolo ABC, ma sì bene delle condizioni, che dee avere il punto D di riduzione, cioè che AD sia doppia di DG, ed allora necessariamente concluderemo, come abbiám veduto, che non si potrà mai trisecare colla retta, e col cerchio un qualunque angolo rettilineo. Che se gli antichi Geometri volendo trisecare l'angolo cercarono da principio risolvere un tal problema mediante i luoghi piani, ciò avvenne al riferir di Pappo (1), perchè non aveano ancora conosciute le curve coniche, ossia quelle linee, a cui essi ne riduceano le condizioni locali del punto in quistione; ma appena conosciute queste curve, il risolsero di poi egregiamente, ed in varie guise riducendolo, come si è mostrato di sopra, ad un problema d'inclinazione, cioè ad *applicare una retta data tra i lati di un dato angolo rettilineo, e che passi per un punto dato*, ovvero come fece Archimede *a tirare una retta da un punto dato nella circonferenza di un cerchio, sicchè la parte, che ne resta tra un suo diametro, e la circonferenza, sia uguale al raggio*: Che anzi dal problema della trisezione dell'angolo, come ho divisato altrove (2), que' savj Geometri cominciarono a distinguere i problemi, che non si possono costruire colla linea retta, e colla circonferenza

(1) Vedi la prima parte di quest'opera §. 17.

(2) Vedi il luogo testè citato.

del cerchio, chiamandoli problemi *solidi*, appunto perchè nella loro costruzione si ricercano quelle linee, che nascono dalle sezioni de' solidi, come sono le curve coniche, a differenza di quegli altri problemi, ch'essi dissero *piani*, perchè si risolvono mediante la retta, ed il cerchio, che hanno l'origine loro nel piano. Intanto per compiere questo argomento è di bene aggiungere quì appresso i sudetti problemi, a cui gli Antichi ne ridussero quello della trisezione dell' angolo, affinchè recandovi le debite determinazioni non indicate da Pappo, si potesse sempre più conoscere la natura de' problemi solidi.

P R O B L E M A II.

Dato qualunque parallelogrammo (Fig. 94.) ABCD, e prodotto il lato BC; fa d'uopo condurre la linea retta AE, e fare EF uguale ad una retta data.

Suppongasi già effettuato il problema, e si compia il parallelogrammo EDGF. E poichè è data la EF, ed è uguale alla DG, sarà anche data questa retta DG; ma è dato il punto D: dunque il punto G sarà ad una circonferenza di cerchio data di posizione. Ma essendo pe' triangoli simili FCE, FBA, ed ADE, FB a BC, come FA ad AE, ovvero come CD a DE, sarà il rettangolo delle BF, e DE uguale al rettangolo BCD; ma il rettangolo BCD è dato. Dunque sarà anche dato il

rettangolo delle BF, e DE , cioè il rettangolo BFG, e perciò il punto G è ad una data iperbole; ma n'è ancora ad una circonferenza di cerchio data di posizione. Dunque il punto G sarà dato.

Intanto il problema compongasì in questo modo.

Sia M la retta data di grandezza , e prodotto il lato AD del dato parallelogrammo ABCD si faccia DK uguale ad M; indi si descriva l'iperbole DGH, che abbia per assintoti le rette AB, e BC, e che passi per lo punto D. Finalmente col centro D, e con l'intervallo DK descrivasi la circonferenza del cerchio KG, che seghi l'iperbole nel punto G, da cui tirata la GF parallela a DC, si congiungano le rette FA, e DG, e si tiri GL parallela a KA. Dico essere EF uguale alla data retta M. Imperciocchè essendo a cagion dell'iperbole DGH il rettangolo BFG uguale al rettangolo BCD, sarà BF a BC, come DC ad FG. Ma pe' triangoli simili FCE, FBA, ed ADE, FB sta a BC, come FA ad AE, ovvero come CD a DE. Dunque sarà ancora CD ad FG, come la stessa CD a DE: e quindi FG uguale a DE: onde la figura EFG essendo un parallelogrammo, sarà EF uguale a DG, ossia a DK, cioè alla data retta M. C. B. F.

S C O L I O.

A questo problema, che vien rapportato da Pappo nella proposizione XXXI. del libro IV. delle sue Collezioni matematiche, si riduce, come abbiamo veduto di sopra, la trisezione dell'angolo CAD (*Fig. 95.*), purchè però il dato parallelogrammo ADCB sia rettangolo, e la data retta EF sia doppia della sua diagonale AC, nel qual caso è manifesta la determinazione del problema: dappoichè il cerchio descritto col centro D, e con l'intervallo DK uguale a DG" doppia della diagonale DB ne sega non solo l'iperbole DG ne' punti G, e G', ma ancora l'iperbole opposta G"G''' ne' punti G'', e G''', mentre il detto cerchio allora potrebbe toccare l'iperbole G"G''' nel punto G'', quante volte DG" fosse l'asse di queste iperboli, lo che ne avviene, quando ei ne bisega l'angolo asintotico ABC, o ch'è lo stesso, quando il dato rettangolo ABCD sia un quadrato, ovvero semiretto il dato angolo da trisecarsi CAD. Ma fuori di questo caso il detto cerchio ne sega le divise iperboli in quattro punti G, G', G'', e G''', da ciascuno de' quali abbassate le GF, G'F', G''F'', G'''F''' perpendicolari a BC, ed unite le rette AF, AF', AF'', AF''', ne verranno, come si è dimostrato, le EF, E'F', E''F'', E'''F''' ciascuna uguale alla doppia diagonale DB. Vale a dire, *dall'angolo A del parallelogrammo ABCD si può*

in quattro differenti modi tirare una retta, sicchè la parte, che ne resta tra i lati opposti ad esso angolo A sia doppia della diagonale DB; ed è poi facile a rilevare, che allora si otterrà la terza parte del dato angolo CAD, quando cioè la retta EF ne sottende l'angolo DCF, e quando poi ne sottende l'angolo verticale BCE', allora si trisecherà il complemento CAB del dato angolo CAD; e finalmente si trisecherà il supplemento del dato angolo CAD, quante volte la retta F'''E''' ne sottenda l'angolo BCD, e non sia parallela alla diagonale DB, altrimenti essendole parallela come la F''E'', allora perchè questa retta non dipende, come è chiaro, dall'iperbole G''G''', perciò la medesima non trisecherà alcun angolo, che abbia relazione coll'angolo dato.

P R O B L E M A III.

Dato il cerchio ADCE (Fig. 96.), il punto G nella sua circonferenza, ed il diametro AE, tirare dal punto G la retta GDF per modo, che la parte DF tra la circonferenza, ed il diametro sia uguale al raggio.

Suppongasì effettuato il problema, e da' punti G, e D si abbassino le GH, e DI perpendicolari ad AF. E poichè per ipotesi DF è uguale a DB, sarà ancora FI uguale ad IB, ed IB metà di BF. Ma pe' triangoli simili GFH, e DFI, GH sta a DI, come HF ad FI, o alla sua uguale IB. Adun-

que prendendo le HK, ed IL metà degli antecedenti GH, ed HF, sarà KH a DI, come IL ad IB, ovvero compiti i parallelogrammi IM, ed IN, come DN a DM; e con ciò il rettangolo di HK, e DM sarà uguale al rettangolo di DI, e DN: ma la IL essendo per costruzione metà di FH, ed IB metà di BF, sarà BL metà di BH, e con ciò sarà dato il punto L, e la LN sarà data di sito del pari, che le BM, ed AE. Adunque le DN, DM, e DI sono rette in paratesi tirate su di esse dal punto D, ed essendosi dimostrato il rettangolo delle DI, e DN uguale al rettangolo della DM, e della KH data di grandezza, il punto D sarà ad una data iperbole. Ma n'è ancora ad una data circonferenza di cerchio. Dunque il punto D sarà dato.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Dal punto G si abbassi la GH perpendicolare ad AE, e si bisechi la BH nel punto L; indi da' punti B, ed L s'innalzino le BM, ed LN perpendicolari ad AE, e per la proposizione terza del primo porisma intendansi descritte le iperboli opposte DD', e GG' tali, che da qualunque punto D preso ad arbitrio nel loro perimetro, e tirate da esso sulle date linee LN, e BM le rette in paratesi DN, e DM parallele ad AE, e sulla AE la DI parallela alle date rette LN, ed BM, sia il rettangolo di DI, e DN uguale al rettangolo

di DM , e della data retta KH metà di GH . Ciò posto, suppongasi essere D uno de' punti, ove queste iperboli ne segano la circonferenza del cerchio $ADCE$, e presa nella retta AE la IF uguale ad IB , si congiungano le rette FD , DG , GB , e BD . E poichè per costruzione il rettangolo di DI , e DN è uguale al rettangolo di DM , e KH , sarà KH a DI , come DN a DM , ovvero prendendo le loro uguali, come IL ad IF ; e raddoppiando gli antecedenti di quest' analogia, sarà GH a DI , come HF ad IF : per cui le FD , e DG saranno per diritto. Ma ne' triangoli rettangoli DIF , e DIB il lato IF è uguale per costruzione al lato IB , ed il lato DI è comune: dunque sarà la base DF uguale alla base DB , cioè sarà la DF uguale al raggio. C. B. F.

S C O L I O.

Volendo l' effettiva descrizione delle iperboli DD' , e GG' , basterà prendere la BG , che sega ne' punti O , e B le rette LN , AE , e BM in luogo della BR , che nella proposizione terza del primo porisma per la massima generalità si è tirata comunque sulle date rette, poichè secondo il prescritto di quella proposizione si troverà immantinente, che la ragione ausiliaria di O a P , ovvero di T ad Il sia uguale a quella di BO ad OL , che le rette OK , ed OL sieno gli assintoti delle iperboli DD' , e GG' , e che la retta BG

siane il loro diametro : donde ben si vede , che le dette iperboli sieno quelle stesse , che per la trisezione del dato angolo ABC ne rinvenne il celebre Francesco Slusio ; però è d'avvertirsi , ch' egli a tal uopo giusta il metodo de' Moderni fu costretto a ridurre primieramente in equazione il rapporto delle due DI , ed IB , ovvero DM coordinate del punto D , o vogliam dire rette in paratesi tirate dal punto D sulle date direttrici AE , e BM , e poi di questa equazione fu obbligato il Valentuomo ad eseguirne la costruzione geometrica sì necessaria per la risoluzione de' problemi ; al contrario nel metodo degli Antichi tutta la difficoltà si riduce , come abbiamo veduto , a ritrovare quella semplicissima analogia tra la data retta HK metà di GH , e le tre rette in paratesi DF , DN , e DM tirate dal punto D sulle date direttrici AE , LN , e BM , e ciò riflettendo per poco su i triangoli simili GFH , e DFI , anzi la detta difficoltà si può cziandio ridurre a trovare il rapporto tra quattro rette in paratesi tirate dal punto D su i lati del dato parallelogrammo rettangolo GB , considerando gli altri triangoli simili GDP , e DIF. Imperciocchè allora avremo , com'è chiaro , DP a DI , come GD a DF , o come HI ad IB , ovvero compiti i parallelogrammi IM , ed IQ , come DQ a DM ; la quale analogia ne mostra immediatamente il luogo del punto D in virtù della proposizione seconda del terzo porisma. Intanto la determinazione del problema n'è manifesta ,

dappoichè la circonferenza del cerchio ADCE sega, com'è chiaro, le iperboli DD', e GG' in quattro punti D, D', G, e G', a tre de' quali cioè ai punti D, D', e G' tirate dal punto G le rette GD, GD', e GG' ne risultano, come si è dimostrato, le DF, D'F', e G'F'' ciascuna uguale al raggio; ed è poi evidente, che il diametro GBD'' tirato dal punto G ne sodisfi ancora alle condizioni del problema. Vale a dire, *dal punto G nella circonferenza del cerchio ADCE si può in quattro differenti modi tirare una retta sul diametro AE, sicchè la parte, che resta tra la circonferenza, ed il diametro, sia quanto il raggio, ossia dal punto G si possono tirare quattro differenti rette soddisfacenti alla detta condizione, cioè le GF, GB, GF', e GF''*; delle quali la GB non trisega alcun arco, che abbia relazione coll'arco EG, appunto perchè essa non dipende dalle descritte iperboli DD', e GG', ma delle tre altre, la GF, di cui l'intercetta DF ne resta tutta fuori del cerchio, trisega l'arco EG, ossia taglia l'arco AD terza parte dell'arco EG, come l'ha dimostrato Archimede nell'ottavo de'suoi lemmi, la GF' poi, di cui la parte D'F' cade tutta al di dentro del cerchio, ne trisega il complemento del dato arco EG, e la GF'', di cui la G'F'' ne cade parte al di dentro, e parte al di fuori del cerchio, ne trisega il supplemento del dato arco EG, come lo ha rilevato egregiamente

l'immortal Fergola (1), universalizzandone per tal modo quel lemma di Archimede.

P R O B L E M A IV.

Tra due rette date trovare due medie continuamente proporzionali.

Sieno AB, e BC le date rette (*Fig. 97.*), fa d'uopo tra queste trovare due medie continuamente proporzionali. Suppongansi essere BD, e BE le due medie richieste, che si prendano nelle date rette BC, e BA, e disposte tra loro ad angoli retti, si compiano i parallelogrammi BF, e BG. E poichè sta AB a BD, come BD a BE, sarà il rettangolo ABE uguale al quadrato di BD. Similmente essendo per ipotesi DB a BE, come BE a BC, sarà il rettangolo DBC uguale al quadrato di BE; e quindi sarà la differenza del rettangolo ABE, e del quadrato di BE uguale alla differenza del quadrato di DB, e del rettangolo DBC, vale a dire sarà il rettangolo BEA uguale al rettangolo BDC, ossia compito il parallelogrammo HI, sarà il rettangolo DGI uguale al rettangolo EGH. Ma le GD, e GI, le GE, e GH sono rette in ipotesi tirate rispettivamente dal punto G su i lati opposti BC, ed AF, AB, e CF del dato parallelogrammo BF. Dunque per la proposizione se-

(1) Vedi il suo insigne trattato de' luoghi geometrici pag. 134.

conda del terzo porisma il punto G sarà alla circonferenza di un dato cerchio. Ma essendo per ipotesi AB a BD , come BE a BC , sarà il rettangolo BG uguale al dato rettangolo BF ; e perciò il punto G sarà ad una data iperbole. Ma è ancora alla circonferenza di un dato cerchio. Dunque il punto G sarà dato.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Le date linee AB , e BC si pongano tra loro ad angolo retto, e compito il parallelogrammo BF , i lati AB , e BC si prolunghino indefinitamente verso K , e verso L ; indi al parallelogrammo BF si circoscriva il cerchio $ABCF$, il di cui centro sarà il punto M , ove s'intersecano le diagonali AC , e BF del detto parallelogrammo. Finalmente si descriva l'iperbole FG , che abbia per assintoti le date rette AB , e BC , e passi pel punto F . E chiaro, che l'iperbole FG dovrà segare la circonferenza del cerchio $ABCF$ nel solo punto G , dal quale si tirino le rette GE , e GD perpendicolari alle date rette AB , e BC , e si compia il parallelogrammo HI . Dico essere GE , e GD le due medie continuamente proporzionali tra le date rette AB , e BC . Imperciocchè essendo uguali i rettangoli BF , e BG a cagion dell'iperbole FG , se da essi tolgasi di comune il parallelogrammo CE , rimarrà il parallelogrammo AH uguale al parallelogrammo HD , e con ciò sarà AE a CD ,

come CH ad HE, ovvero prendendo i loro uguali, come EB a BC; quindi sarà pure (12. *Elem. V.*) AB a BD, come EB a BC, ovvero come AE a CD. Ma a cagion del cerchio ABCG essendo il rettangolo DGI uguale al rettangolo EGH, ossia il rettangolo BEA uguale al rettangolo BDC, sarà AE a CD, come BD a BE. Adunque essendosi dimostrato AB a BD, come EB a BC, ovvero come AE a CD, si avrà AB a BD, come BD a BE, ovvero come BE a BC. Vale a dire le quattro rette AB, BD, BE, e BC saranno continuamente proporzionali, e le BD, e BE, o le loro uguali GE, e GD saranno le due medie continuamente proporzionali tra le date rette AB, e BC. C. B. R.

S C O L I O.

Il luogo del punto G di riduzione di questo problema, come abbiamo veduto, è ad una data circonferenza di cerchio, non meno che ad una data iperbole, e ciò per le condizioni delle rette in paratesi GE, e GD, che insieme con le date linee AB, e BC formano il rettangolo GEBD, e sono le due medie proporzionali richieste. Ma qui è di ben riflettere, che da queste condizioni delle rette in paratesi rilevar si possono agevolmente moltissimi altri luoghi, che ancora ne tocca il punto G. Infatti essendo per le anzidette condizioni il rettangolo di AB, e GD uguale al quadrato di GE, ed il quadrato di GD uguale

al rettangolo di BC, e GE, sarà chiaro (*Scol. prop. II. por. I.*), che in virtù di questi rapporti delle rette in paratesi il punto G ne tocca due date parabole: e lo stesso si vedrà ancora toccare innumerevoli ellissi, sol che nella proporzione, che i predetti spazj costituiscono tra loro, invece di una retta in paratesi un'altra se ne introduca, e poscia nella nuova proporzione, che n' emerge, si prenda la differenza degli antecedenti, e de' conseguenti, come si è praticato nella prima proporzione, donde si è rilevato il luogo del punto G essere ad una data circonferenza di cerchio. Così a cagion di esempio (*Fig. 98.*), se invece della retta in paratesi GD prendasi l'altra GN, e nella proporzione de' sudetti spazj in luogo del rettangolo di AB, e GD, e del quadrato di GD si sostituiscano rispettivamente il rettangolo di AB, e GN, ed il quadrato di GN, avremo due nuove ragioni, cioè la ragione del rettangolo di AB, e GN al quadrato di GE, e la ragione del quadrato di GN al rettangolo di BC, e GE, la prima delle quali, com'è chiaro, ne pareggia la ragion data di GN a GD, e la seconda n'è uguale a quella del quadrato di GN al quadrato di GD: quindi volendo ridurre questa seconda ragione ad uguagliarne la prima, si dovrà mutare il suo conseguente, assumendo a tal uopo in luogo del rettangolo di BC, e GE l'altro della retta EO, e della stessa GE, che stia al quadrato di GN nella data ragione di GD

a GN ; sarà il rettangolo di EO , e GE al quadrato di GD , come GD a GN , e come il quadrato di GN al quadrato di GD , ossia come GN a GD. Ma per essere il quadrato di GD uguale al rettangolo di BC, e GE, l'è benanche il rettangolo di EO , e GE al quadrato di GD, come EO a BC. Dunque sarà ancora EO a BC nella data ragione di GN a GD , e quindi la EO al pari della BC sarà data di grandezza , ed il punto O toccherà la retta OP data di sito , e parallela ad AB. Ciò posto, essendo per costruzione il rettangolo di AB , e GN al quadrato di GE , come il quadrato di GN al rettangolo di EO , e GE , sarà per la XI. El. V. la differenza del rettangolo di AB , e GN , e del quadrato di GN al rettangolo EGO , come il rettangolo di AB , e GN al quadrato di GE , cioè nella data ragione di GN a GD. E prendendo nella NG la NQ uguale alla data retta AB , il punto Q ne toccherà, com'è chiaro, la retta QR data di sito , e parallela alla data retta BC , e la differenza del rettangolo di AB , e GN , e del quadrato di GN sarà uguale al rettangolo NGQ. Adunque sarà ancora il rettangolo NGQ al rettangolo EGO nella data ragione di GN a GD , e quindi il punto G per la prop. III. del porisma III. ne sarà ad una data ellisse, la quale varia secondocchè ne varia la ragion data di GN a GD , e siccome questa ragione , perchè arbitraria , può cambiarsi all' infinito , così infinite ellissi ne toccherà il

punto G. Similmente argomentando per la XII. dell' El. V. ritroveremo , che il punto G ne tocca ancora infinite iperboli. Intanto due di cotesti luoghi bastano colle loro intersezioni a determinare il punto G. Ma quali di essi si debbano scegliere a preferenza degli altri ? Ecco la gran quistione, che tiene divisi tuttavia i Geometri , e gli Analisti ; mentre sebbene tutti convengono , che nella risoluzione de' problemi di terzo , e quarto grado si debba mai sempre un luogo piano combinare con un luogo solido , pure nella scelta di questo vi è grandissima dissenzione tra di loro. Dappoichè gli Analisti seguendo il Cartesio vogliono , che la parabola debbasi preferire all' ellisse , come quella, che avendo una equazione assai più semplice tra le sue coordinate ne rende il calcolo più facile, e spedito. Al contrario i moderni Geometri dietro le orme del Cavalier Newton sostengono, che nell' Analisi de' problemi deesi piuttosto badare alla semplicità della costruzione, anzicchè a quella delle loro equazioni ; e però dicono essi , che ne' problemi solidi si debba adoprare l' ellisse in preferenza della parabola , non solo perchè l' è più finitima al cerchio , la di cui descrizione è un postulato in Geometria , ma ancora perchè più facilmente si descrive della parabola ; altrimenti si dovrebbe allo stesso cerchio preferire la parabola , appunto perchè l' equazione di questa curva n' è molto più semplice di quella del cerchio. Intanto il

Newton , ed il Cartesio una co' loro seguaci par, che in questa parte ne avessero del tutto obliata l' iperbole , la quale certamente per la semplicità della sua equazione , allorchè si rapporta tra gli assintoti , non è mica inferiore alla parabola ; e per la facilità poi , che ne reca alle costruzioni de' problemi a niun' altra curva conica potrà mai cedere , allorchè si voglian quelli praticamente risolvere. Dappoichè sebbene il Geometra dee considerare i problemi nel campo dell' astrazione , altrimenti le di lui operazioni sarebbero molto limitate , e ristrette , e la Geometria non sarebbe più una scienza speculativa , ma bensì un' arte da tavolino ; pur tuttavia non può negarsi , che alcune volte deve egli ridursi ad operare in concreto , ed in questo caso , ch' è quello appunto , cui Newton riduce tutta la questione , non mi pare , a dir vero , che si possa descrivere l' ellisse più agevolmente della parabola , mentre la differenza l' è molto piccola ; e poi tutte le curve coniche , come ben avvertirono gli antichi Geometri al riferir di Pappo (1), non essendo facili a disegnarsi in piano , non potrà in pratica l' una piuttosto preferirsi alle altre ; ciò non ostante questa preferenza , se il mio pensier non erra , si dovrà accordare di buon

(1) Vedi la prefazione al III. Libro delle *Collezioni Matematiche* di Pappo.

grado all' iperbole. Poichè godendo questa curva una proprietà singolarissima a differenza della parabola, e dell' ellisse, cioè, che tirata comunque una retta da un punto preso ad arbitrio nel suo perimetro, le parti, che ne restano tra la curva, e gli assintoti, sono uguali tra di loro, potremo facilmente assegnare un punto di detta curva senza ch' essa effettivamente si descriva; e ciò mediante il moto semplicissimo di una riga intorno ad un punto fisso. Lochè ben si comprende, quanto ne agevola in pratica le operazioni. In fatti volendo gli antichi Geometri costruire per tal modo il problema della trisezione dell'angolo CAD (*Fig. 94.*), che il ridussero, come si è detto, a tirare dall' angolo A del dato parallelogrammo rettangolo ABCD la retta AF per modo, che la EF sia doppia di AC, affid di esibirne il punto G di riduzione, ove l' iperbole DGH ne sega il cerchio EGK, basterà aggirarne la riga NGO intorno al dato punto D, sicchè la parte DN tra il punto D, e l' assintoto BN sia uguale a GO, che si arresta tra la circonferenza del cerchio EGK, e l' altro assintoto BO. Inoltre volendo praticamente ritrovare le due medie proporzionali tra le date rette AB, e BC (*Fig. 97.*) affin di assegnare il punto G di riduzione, ove l' iperbole FG rapportata agli assintoti BK, e BL ne sega il cerchio ABCF, basterà, che la riga LFK si aggiri intorno al dato punto F, finche la parte FK, che ne resta tra il dato punto F, e l' assintoto

BK, riesca uguale alla parte GL, intercetta tra la circonferenza del cerchio ABCF, e l'altro asintoto BL, o che ritorna allo stesso, finchè i punti L, e K sieno ugualmente distanti dal punto M: che sono appunto, come rapporta Eutocio (1), i due metodi tanto lodati dagli Antichi per la facilità, e commodità loro nella pratica, e proposti per l'invenzione delle due medie proporzionali, uno da Filone di Bizanzio, e l'altro da Erone di Alesandria, i quali al dir di Pappo (2) li rilevarono congruentemente a quel metodo, che aveane allo stess' uopo escogitato Apollonio Pergeo: e sebbene questi non dimostra geometricamente come si possa tirare la retta LFK, sicchè la parte GL sia uguale alla parte FK, pure affermando Pappo (3), aver Apollonio risoluto il problema delle due medie proporzionali per mezzo delle sezioni coniche, non si può dubitare, che non avesse conosciuto quel gran Geometra, che il punto G si appartenga ad un' iperbole, che l'è una curva tanto utile per la pratica, come abbiain veduto in questi due problemi solidi, e si potrà ancora vedere in tutti gli altri. Quindi ben si scorge con quanta sapienza gli antichi Geo-

(1) Vedi i Commentarj di Eutocio al II. Libro di Archimede *de sphaera, et cylindro*.

(2) Vedi la pref. al III. lib. delle *Coll. Mat.* di Pappo.

(3) Vedi Pappo nel luogo testè citato.

metri volendo ridurre i problemi solidi ad operazioni facili, e manuali invece della parabola, e dell'ellisse avessero adoprata l'iperbole; e ciò per quella proprietà detta dianzi, per cui questa curva conformasi mirabilmente alla stessa concoide tanto lodata dal Cavalier Newton per la costruzione de' problemi solidi. Del rimanente, se poi si voglian risolvere i problemi non già in concreto, ma bensì in astratto, allora non vi è dubbio, che *si dovranno scegliere le linee più semplici, cioè quelle, che più facilmente emergono dall'analisi de' problemi, e più adeguatamente n'esibiscono tutt' i punti di riduzione conforme alla loro natura.* Così nella trisezion dell' angolo, chi non vede essere da preferirsi la parabola all' ellisse? Imperciocchè essa rilevasi con un semplicissimo sviluppo di ragioni, come di sopra abbiain veduto, pervenendosi immantinente ad un rapporto delle rette in paratesi tirate dal punto in quistione su due date direttrici; al contrario per rinvenir l'ellisse non già a due date direttrici, ma bensì a quattro, si dovrà rapportare questo punto di riduzione, abbisognandovi a tal uopo adoperare moltissimi ripieghi. Così ancora volendo risolvere in astratto il problema delle due medie proporzionali, certamente non vi sarebbero altre curve, che più facilmente emergano dall'analisi di esso, quanto quelle due parabole proposte a quest' uopo da Menecmo, alle quali si appartiene, come si è detto, il punto G di

riduzione. E sebbene questo metodo di Menecmo sia brevissimo, ed in se molto commendevole, pure volendosi stare alla pratica, ei non si dovrebbe ammettere sì volentieri, appunto perchè difficilmente si descrivono le parabole nel piano. In fatti per tal motivo gli Antichi si rivolsero piuttosto all'iperbole, ed alcuni di essi, come il celebre Nicomede, finanche alla concoide, benchè sia una curva di quart' ordine, ed eccedente la natura del problema. Imperciocchè egli ne ridusse l'invenzione delle due medie proporzionali all'istessa guisa, che la trisezione dell'angolo, cioè ad *applicare una retta data di grandezza tra i lati di un dato angolo rettilineo, e che passi per un punto dato*, problema, che in pratica si può risolvere egregiamente con la concoide, la quale in vero non differisce gran fatto dall'iperbole, allorchè praticamente questa si descriva, come si è detto, per assegnazione di punti.

Intanto al problema delle due medie proporzionali riducesi, com'è chiaro, quello della moltiplicazione de' solidi in data ragione, serbandosi però la simiglianza delle figure, problema di sommo rilievo in Geometria, e che in se ne comprende quell'altro assai famoso della duplicazione del cubo, la di cui origine si attribuisce a Minosse Rè di Creta. Dappoichè sentendo egli, come si rileva dalla lettera di Eratostene al Rè Tolomeo, che la tomba di Glauco era per ogni lato lunga cento piedi, e sembrandogli questo spazio troppo

angusto per un sepolcro reale , ordinò che un'altro se ne costruisse doppio del primo , e della stessa forma cubica di esso. Ma il fatto però non corrispose al comando , poichè essendosi raddoppiati i lati del dato cubo , il solido che si ottenne non riuscì duplo , come si prescrivea , ma bensì ottuplo del cubo proposto; per cui si conobbe , che i lati del dato solido si doveano accrescere in un'altra proporzione , e vi fu di bisogno , che i Geometri si applicassero di proposito ad un tal problema , che si disse , *della duplicazione del cubo* , appunto perchè dato un cubo si ricercava , che un altro se ne costruisse doppio del primo. Ora mentre gli altri Geometri si affaticavano ad una tal ricerca , Ippocrate di Chio fu il primo , che indicò la maniera di eseguirla , purchè però si potessero trovare due medie continuamente proporzionali tra due rette date , l'una doppia dell'altra , vale a dire da una difficoltà si passò ad un'altra maggiore. Ma dopo alquanto tempo cercando gli abitatori di Delo un rimedio per liberarsi dalla peste , che li affliggea , consultarono a tal' uopo il di loro famoso Oracolo di Apollo , il quale rispose , che allora sarebbe terminata quella sciagura , quando li avrebbero raddoppiata l'Ara del suo Tempio , ch' era di forma cubica. Essi però non compresero questo Geometrico ripiego dell' Oracolo , ed accadde loro nella struttura dell' Altare ciò , ch' era avvenuto al tempo di Minosse , cioè in vece di costruire il doppio dell'

Ara, ne fecero una ottupla; per cui furono costretti a ricorrere al Divino Platone, come intelligentissimo delle cose matematiche, cercando la spiegazione di quella sentenza dell' Oracolo. Ma egli, come dice Plutarco nel libro del genio di Socrate, fece loro intendere, che il Nume avea voluto burlare i Greci, ed insultare alla loro ignoranza, mentre essi con negligenza si applicavano alle scienze, e che ordinava loro, che attendessero seriamente alla Geometria; indi spiegò la vera maniera di raddoppiare il cubo, quella cioè indicatane da Ippocrate di Chio: ed allora, come sappiamo dallo stesso Eratostene, fu che Platone impegnò vivamente i Geometri, ch' erano nell' Accademia, obbligandoli all' invenzione delle due medie proporzionali; ed in fatti molti di questi vi riuscirono, e varj metodi si proposero a tal' uopo, come gli abbiamo da Eutocio. Ma che che ne sia di questo grandioso racconto, è certo, che d' allora in poi la Geometria sublime fece mirabili progressi appresso de' Greci.

P R O B L E M A V.

Data la sfera ABCD (Fig. 99.), fa d' uopo dividerla in due porzioni, che sieno tra loro nella data ragione di E ad F.

Suppongasi già effettuato il problema, ed il cerchio AGC sia la comune base delle due porzioni ABC, ed ADC della sfera ABCD, che so-

no tra di loro nella data ragione di E ad F. E tirato per lo centro H della sfera il cerchio ABCD perpendicolare al cerchio AGC, sarà chiaro, che il diametro BHD del primo di detti cerchi, che si conduca perpendicolarmente alla loro comune sezione AC, bisecherà questa retta nel punto I, e ne sarà ancora perpendicolare al cerchio AGC, che avrà per centro il punto I. Ciò premesso, le IK, ed IL siano le altezze de' due coni AKC, ed ALC uguali rispettivamente alle due porzioni della sfera ABC, ed ADC, e che abbiano con queste la medesima base AGC, e le BM, e DN, sieno uguali ciascuna al raggio HB della data sfera ABCD, sarà KI ad IB, come NI ad ID, DI ad IL, siccome IB ad IM, ed i coni AKC, ed ALC al pari delle porzioni della sfera ABC, ed ADC saranno anche nella data ragione di E ad F. Ma i coni AKC, ed ALC sono come le loro altezze KI, ed IL: dunque sarà ancora E ad F, come KI ad IL; ed essendo KI ad IL in ragion composta di KI ad IB, di IB ad ID, e di ID ad IL, sarà ancora E ad F in ragion composta di KI ad IB, di IB ad ID, e di DI ad IL. Ma la ragione, che si compone dalle due ragioni di KI ad IB, e di DI ad IL, è uguale a quella che si compone dalle loro uguali di NI ad ID, e di IB ad IM, ovvero di NI ad IM, e di IB ad ID, scambiando i conseguenti. Dunque sarà E ad F in ragion composta della ragione di BI ad ID, e di quella, che si compone dalle due ra-

gioni di NI ad IM , e di BI ad ID , cioè alla ragion composta di NI ad IM , e della duplicata di BI ad ID ; e con ciò la ragion composta della sudduplicata di NI ad IM , e della ragione di BI ad ID sarà uguale alla ragione di E ad O , media proporzionale tra E , ed F. Ma la ragion sudduplicata di NI ad IM è uguale alla ragione di NI ad IP , intendendosi prolungata la retta IA finchè segghi nel punto P la circonferenza del cerchio NPM descritto col centro H , e coll' intervallo HN , ovvero HM : dunque sarà ancora E ad O in ragion composta di NI ad IP , e di BI ad ID , ovvero componendo queste ragioni , e compiti i parallelogrammi IQ , IR , ed IS , come il rettangolo SPQ al rettangolo RPI. Ma le PS , PQ , PR , e PI sono rette in paratesi tirate dal punto P rispettivamente sulle date direttrici NS , BQ , DR , e BD , e n' è data la ragione di E ad O : dunque per la proposizione V. del terzo porisma il punto P sarà ad una data sezione conica ; ma l'è ancora alla data circonferenza del cerchio NPM : dunque il punto P sarà dato.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Per lo centro H della data sfera si conduca il cerchio ABCD , di cui BHD siane un diametro , nel quale si prendano le BM , e DN uguali ciascuna a BH , e descritto col centro H , e coll' intervallo HM , ovvero HN il cerchio NPM , si

tirino da' punti N , D , e B le NS , DR , e BQ perpendicolari a BD , che saranno tra di loro parallele ; indi per la proposizione V. del terzo porisma intendansi descritte le iperboli opposte PT , ed UV tali , che da qualunque punto P del loro perimetro tirate rispettivamente sulle date rette NS , BQ , DR , e BD le PS , PQ , e PR parallele a BD , e la PI parallela alle rette BQ , DR , ed NS , sia il rettangolo SPQ al rettangolo RPI , siccome E ad O , media proporzionale tra le date rette E , ed F , e P sia uno de' punti , ove le descritte iperboli ne segano il cerchio NPM , talchè la perpendicolare PI abbassata da esso sul diametro BD ne seghi il cerchio ABCD ne' punti A , e C. Finalmente per la retta AC conducasi il piano AGC perpendicolare al piano del cerchio ABCD , che dividerà la data sfera in due porzioni ABC , ed ADC aventi per comune base il cerchio AGC , di cui il punto I ne sarà il centro , ed il diametro BD ne sarà perpendicolare al cerchio AGC. Ciò premesso , siano le KI , ed IL le altezze de' due coni AKC , ed ALC uguali rispettivamente alle due porzioni della sfera ABC , ed ADC , che abbiano per comune base il cerchio AGC , sarà (1), KI ad IB , come IN ad ID , ed ID ad IL , come

(1) Vedi Archimede prop. II. Libro II. *de sphaera , et cylindro.*

IB ad IM. E poichè E sta ad O, come il rettangolo SPQ al rettangolo RPI, sarà ancora E ad O in ragione composta di SP, ovvero di NI ad IP, e di PQ a PR, ossia di BI ad ID; ma la ragione di E ad F è duplicata di quella di E ad O, e la ragione di NI ad IM è duplicata della ragione di NI ad IP: dunque sarà E ad F in ragione composta di NI ad IM, e della ragione duplicata di BI ad ID, ovvero in ragione composta della ragione di BI ad ID, e di quella, che si compone dalle due di NI ad IM, e di BI ad ID. Ma la ragione, che si compone dalle due di NI ad IM, e di BI ad ID, ovvero di NI ad ID, e di BI ad IM, scambiando i conseguenti, è quanto quella, che si compone dalle loro uguali di KI ad IB, e di DI ad IL: dunque sarà ancora E ad F in ragione composta della ragione di BI ad ID, e di quella, che si compone dalle ragioni di KI ad IB, e di DI ad IL, ossia in ragione composta di KI ad IB, di BI ad ID, e di DI ad IL, cioè nella ragione di KI ad IL. Ma in questa ragione sono anche tra di loro i coni AKC, ed ALC, ovvero le porzioni della sfera ABC, ed ADC, che a quelli sono rispettivamente uguali; dunque saranno ancora le porzioni della sfera ABC, ed ADC nella data ragione di E ad F. C. B. F.

P R O B L E M A VI.

Data la retta indefinita AB (Fig. 100.), dividerla in un punto , sicchè le parti , che ne ascinde da' punti A , e C dati in essa , sieno tali , che il solido contenuto da una delle dette parti , e dal quadrato dell' altra , sia di una data grandezza.

Suppongasi essere D il punto richiesto , ed il solido contenuto dalla DC , e dal quadrato di DA sia della data grandezza , cioè quanto il solido contenuto dalla data retta E , e dal quadrato della data retta F , sarà il quadrato di AD al quadrato di F , come E a DC , ovvero come il rettangolo EDC al quadrato di DC ; e supponendò il rettangolo EDC uguale al quadrato di DG perpendicolare ad AB , sarà pure il quadrato di AD al quadrato di F , come il quadrato di DG al quadrato di DC , e con ciò AD ad F , come DG a DC , ed il rettangolo ADC , ovvero compiti i parallelogrammi DH , e DI , il rettangolo HGI sarà uguale al rettangolo FGD. Ma le GH , GI , e GD sono rette in paratesi tirate dal punto G sulle date direttrici AH , CI , ed AB , e la retta F n' è data di grandezza. Dunque per la proposizione seconda del primo porisma il punto G sarà ad una data parabola. Inoltre essèndo il rettangolo HGI uguale al rettangolo FGD , ed il rettangolo EDC , ovvero EGI uguale al quadrato di DG

saranno i due rettangoli HGI , ed EGI pres'insieme uguali al rettangolo FDG una col quadrato di DG ; ed aggiungendo per dritto alle GH, e GD le HK, e DL uguali rispettivamente alle date rette E , ed F , i punti K , ed L , com' è chiaro , ne toccheranno le date rette KM, ed LN parallele rispettivamente alle DG , e DA , ed i rettangoli HGI , ed EGI pres'insieme saranno uguali al rettangolo KGI , ed il rettangolo FDG una col quadrato di DG sarà uguale al rettangolo LGD; per cui sarà ancora il rettangolo KGI uguale al rettangolo LGD. Ma le GK , e GI, GL , e GD sono rette in paratesi tirate dal punto G su' i lati opposti MN, e CO; NO, ed MC del dato parallelogrammo CN. Dunque per la proposizione seconda del terzo porisma il punto G sarà ad una data circonferenza di cerchio. Ma l' è ancora ad una data parabola : dunque il punto G sarà dato.

Intanto il problema compongasi in questo modo.

Si prolunghi la retta CA verso M , e presa la MA uguale alla retta E , da' punti M , A , e C s'innalzino le MK , AH, e CI perpendicolari ad AC: indi si prenda sulla MK la MN uguale alla retta F , e si compia il parallelogrammo CN, cui si circoscriva il cerchio NMGCO. Finalmente si descriva per la proposizione II. del primo porisma la parabola AGC per modo , che da un qualunque punto G preso nel suo perimetro , e tirate

da esso sulle date direttrici AH, CI, ed AC le rette in paratesi GH, e GI parallele ad AB, e la GD parallela alle AH, e CI, sia il rettangolo HGI uguale al rettangolo della GD, e della data retta F. Ciò posto, sia G un punto, ove la parabola AGC ne incontri il cerchio NMCO, e si compiano i parallelogrammi DK, ed IL. E poichè il rettangolo HGI, ovvero ADC è uguale al rettangolo FGD, ovvero LDG, ed a cagion del cerchio NMCO il rettangolo KGI, ovvero MDC è uguale, com'è chiaro, al rettangolo LGD, sarà la differenza de' rettangoli ADC, ed MDC uguale alla differenza de' rettangoli LDG, ed LGD, cioè il rettangolo di AM, e DC, ovvero EDC uguale al quadrato di GD (1, e 3. *El. II.*). Inoltre essendo il rettangolo ADC uguale al rettangolo FDG, sarà DA ad F, come GD a DC, ed il quadrato di DA al quadrato di F, come il quadrato di GD al quadrato di DC. Ma il quadrato di DG al pari del rettangolo EDC, che l'è uguale, sta al quadrato di DC, come E a DC (1. *El. VI.*). Dunque sarà ancora il quadrato di DA al quadrato di F, come E a DC; e quindi (34. *El. XI.*) il solido contenuto dalla retta DC, e dal quadrato della retta DA sarà uguale al solido contenuto dalla data retta E, e dal quadrato della data retta F. C. B. F.

S C O L I O.

Questo problema , che si è costruito col cerchio, e colla parabola , se mai vogliasi praticamente risolvere , e lo stesso intendasi ancora per tutti gli altri problemi solidi , si dovrà (*Scol. prob. IV.*) combinare col luogo piano NMCO quell' iperbole tra gli assintoti, che ancora ne tocca il punto G di riduzione. Ora per rinvenire in detto problema una tal curva basterà sostituire nell' analisi di esso in luogo della ragione di E a DC quella del quadrato di E al rettangolo EDC, ossia al quadrato di DG; poichè allora avremo il quadrato di AD al quadrato di F, come il quadrato di E al quadrato di DG , e con ciò AD ad F, come E a DG , ed il rettangolo ADG sarà uguale al rettangolo delle date rette F, ed E; onde il punto G sarà ancora ad una data iperbole, i di cui assintoti sono le date rette AB, ed AH. Intanto è da notarsi, che Archimede nel secondo libro *de sphaera et cylindro* ne ridusse all' esposto problema quello della divisione della sfera in data ragione, promettendone in fine la risoluzione, che per altro non si potè mai rinvenire nelle di lui opere per quanta diligenza vi avesse usato Eutocio Ascalonita , com' ei afferma ne' suoi commentarj al detto libro di Archimede; purchè però non vogliasi credere essere stata di questo sommo Geometra quella risoluzione per mezzo della parabola, e dell' iperbole,

che ne reca ivi lo stesso Eutocio, e ch' ei dice di averla in un antico manoscritto incontrata.

P R O B L E M A VII.

Data la retta indefinita AB (Fig. 101.) fa d'uopo dividerla in un punto, sicchè le parti, ch' ei ne ascinde da tre punti A, C, e D dati in essa, serbino rispettivamente alle tre date rette E, F, e G tali ragioni, che la di loro composta ne sia data.

Suppongasi essere H il punto richiesto, sarà data la ragione, che si compone da quelle di HA ad E, di HC ad F, e di HD a G, cioè la ragione del solido contenuto dalle HA, HC, ed HD al solido contenuto dalle date rette E, F, e G. Ma questo solido è dato di grandezza: dunque anche ne sarà dato il solido contenuto dalle HA, HC, ed HD, che facciasi uguale al solido contenuto dal quadrato di CI metà di CA, e dalla data retta DK, sarà (*prop. 34. El. XI.*) il rettangolo AHC al quadrato di CI, come DK a DH; e componendo sarà il quadrato di HI al quadrato di CI, come KH ad HD, ovvero come il rettangolo KHD al quadrato di HD, e prendendo la HL perpendicolare ad AB per modo, che il quadrato di HL sia uguale al rettangolo KHD, sarà ancora HI a CI, come HL ad HD, ed il rettangolo IHD, ovvero MLN, intendendosi compiti i parallelogrammi HM, ed HN, sarà uguale al rettangolo di

HL, e CI; e con ciò il punto L sarà ad una data parabola, di cui supponiamo il punto O esserne il vertice, la retta OP il suo asse, che ne bisegherà ad angoli retti la ID nel punto P, e la IC ne sarà il parametro (*prop. II. poris. I.*). Laonde compito il parallelogrammo LQOR, ne sarà il lato OR una retta data di sito, ed il quadrato di LQ sarà uguale al rettangolo di LR, e CI. Inoltre essendo il quadrato di HL uguale al rettangolo KHD, ovvero SLN, intendendosi compito il parallelogrammo HS, ed il rettangolo di HL, e CI uguale al rettangolo MLN, sarà il quadrato di HL una col rettangolo di HL, e CI uguale ai due rettangoli SLN, ed MLN presi insieme, ossia a tutto il rettangolo di MS, ed LN. Ma prendendo nella retta LH la HT uguale alla data retta CI, il punto T toccherà la retta TU data di sito, e parallela ad AB, e sarà il rettangolo TLH anche uguale al rettangolo di MS, ed LN; quindi il punto L toccherà ancora una data parabola (*prop. II. por. I.*), di cui supponiamo il dato punto V essere il vertice, la VX l'asse, che bisegherà la HT ad angoli retti nel punto X, ed il parametro ne sarà la data retta MS; e compito il parallelogrammo XY, sarà il quadrato di LX uguale al rettangolo di LY, ed MS. Ma si è dimostrato il quadrato di LQ uguale al rettangolo di LR, e CI: dunque sarà la differenza del quadrato di LX, e del rettangolo di LR, e CI uguale alla differenza del rettangolo di LY, ed MS, e del qua-

drato di LQ. Pertanto presa la XZ uguale alla data retta CI, e trovate le due rette Za, ed aX, sicchè il rettangolo ZaX sia uguale al rettangolo delle date rette ZX, ed XR, e fatta la Zb uguale alla data retta Xa, i punti b, ed a ne toccheranno le rette bc, ed ad date di sito, e parallele ad AB, e sarà il rettangolo bLa (*prop. V. por. I. lem. II.*) uguale alla differenza del quadrato di LX, e del rettangolo di LR, e CI. Similmente presa la Qe uguale ad MS, si trovino le due rette ef, ed fQ per modo, che il rettangolo efQ sia uguale al rettangolo delle date rette e Q, e QY, e presa eg uguale alla data retta Qf, i punti g, ed f ne toccheranno, com'è chiaro, le rette gc, ed fh date di sito, e parallele ad OP, ed il rettangolo gLf (*prop. V. por. I. lem. II.*) sarà uguale alla differenza del rettangolo di LY, ed MS, e del quadrato di LQ. Ma questa differenza, e quell'altra detta dianzi si sono mostrate uguali tra di loro: dunque sarà ancora il rettangolo bLa uguale al rettangolo gLf; e quindi il punto L sarà ad una data circonferenza di cerchio. Ma il punto L è ancora ad una data parabola: dunque il punto L sarà dato.

Intanto descritte coteste curve, la composizione del problema n'è di per se manifesta.

S C O L I O.

Da quello, che si è dimostrato in questo problema, ben si rileva, ch' ei si riduce a dividere la retta AB nel punto H per modo, che il solido contenuto dal rettangolo AHC, e dalla retta HD sia di una data grandezza, a qual uopo si è divisa la data retta IB nel punto H, sicchè le parti HK, HD, ed HI, ch' ei ne ascinde da' tre punti K, D, ed I dati in essa, sieno tali, che la ragione delle due HK, ed HD sia duplicata della ragione della rimanente HI ad una qualunque retta CI data di grandezza; mentre questo problema si è appunto risoluto, affinchè nel detto modo resti divisa la data retta AB: che anzi lo stesso problema si dovrebbe eziandio risolvere, se mai al rettangolo AHC si aggiunga un dato spazio, o pure da esso vi si tolga, purchè però si faccia il dato solido uguale a quello, ch' è contenuto dalla retta DK, e dalla differenza, ovvero dalla somma del quadrato di CI metà di CA, e dello spazio dato: poichè allora, com' è chiaro dall' esposta analisi, avremo benanche HK ad HD, come il quadrato di HI alla differenza, ovvero alla somma del quadrato di CI, e dello spazio dato, cioè in duplicata ragione di HI ad una retta data di grandezza. Intanto a siffatto problema riducesi mirabilmente la costruzione geometrica dell' equazione di terzo grado senza

nica bisogno di eliminarvi il secondo termine, o di accomodare in altra guisa i coefficienti, come usa il Cartesio, per cui rendesi oltremodo implicato, e particolare il suo metodo. Infatti prendasi a costruire l'equazione di terzo grado, che per la massima generalità si proponga in questa forma $x^3 + Ax^2 + BCx = DEF$, ove la x (*Fig. 102.*) n' esprima la retta GH presa dal punto H in quistione sulla retta GI data di sito, e dal punto G dato in essa; e le A, B, C, D, E, ed F dinotano date rette, é comunque positive, o negative. Ciò posto, è chiaro, che la data equazione sia la stessa, che la $x (x^2 + Ax + BC) = DEF$, i di cui membri, se ben si riflette, ne dinotano appunto i rapporti delle parti della data retta GI, che il punto H in quistione ascinde da' punti dati in essa, e basta il rilevarli, perchè poi la data equazione ne resti costruita egregiamente senza più fare. Così per esporre il progresso di questa facilissima operazione aggiungasi per dritto alla GH la retta GK uguale alla data retta A, o pure da essa si sottragga, secondocchè A sia positiva, o negativa, sarà dato il punto K, ed il rettangolo KHG $= x^2 + Ax$: quindi aggiuntovi, ovvero toltovi di comune il dato spazio BC, secondocchè ei sia positivo, o negativo, avremo la somma, ovvero la differenza del rettangolo KHG, e del dato spazio $BC = x^2 + Ax + BC$; e con ciò sarà il solido contenuto dalla detta somma, ovvero differenza, e dalla retta GH $=$

$x (x^2 + Ax + BC) = DEF$; vale a dire data la retta indefinita KI, ed in essa i punti K, e G, la costruzione della data equazione si riduce a dividere la KI nel punto H per modo, che il solido contenuto dalla GH, e dalla somma, ovvero differenza del rettangolo KHG, e dello spazio dato BC sia di una data grandezza. Lo che trovasi per avventura già eseguito nel problema precedente, di cui esso n'è un caso semplicissimo. Se non che volendolo tradurre in pratica, basta riflettere, che il quadrato di HL essendo per costruzione uguale al rettangolo KHD, il punto L sarà ad una iperbole parilatera, i di cui assintoti, come l'è chiaro, sono due rette tirate dal punto medio dell'asse DB, che formano con questo angoli semiretti; per cui senza l'effettiva descrizione di detta curva potendosi mirabilmente ottenere il punto L dell'intersezione di essa col dato cerchio CDH mediante il semplice moto di una riga intorno al punto D, si verranno ad assegnare per tal mezzo le radici della proposta equazione cubica in una maniera molto simile a quella di ritrovare le due medie proporzionali cotanto celebrata dagli Antichi (*Scol. prop. IV.*). Lo stesso intendasi benanche per la costruzione dell'equazione di quarto grado, ove però siasi prima costruito il suo analogo problema della divisione, cioè, *in un punto della data retta indefinita, sicchè le parti, ch'ei ne ascinde da quattro punti dati in essa, serbino*

rispettivamente a quattro date rette tali ragioni, che la loro composta ne sia data. E così ancora volendo costruire l'equazioni degli altri gradi, si dovrebbero parimenti risolvere i loro analoghi problemi, che si appartengono a quella numerosa famiglia de sectione determinata, così detta da que' vetusti Geometri nel luogo risoluto, e di cui basta ora averne accennato il grande uso per la costruzione geometrica di tutte le equazioni.

P R O B L E M A VIII.

Dato l'angolo ABC (Fig. 103.), e tirata comunque fra i suoi lati la retta DE in modo però, che passi pel dato punto F, fa d'uopo ritrovare il luogo del punto G, in cui essa retta resta divisa nelle parti DG, e GE, che siano tra loro nella data ragione di H ad I.

Si conduca dal punto G la retta KGL parallela ad AB, che seghi la BC nel punto K, e pel punto E si tiri la EM parallela a BC, che incontri la KG nel punto L; sarà pe' triangoli simili DGK, ed EGL KG a GL, come DG a GE, ovvero per ipotesi come H ad I. Ma tirate da' punti G, ed F le rette GO, ed FM parallele rispettivamente alle BC, e BA, e compiti i parallelogrammi GN, e GM, questi saranno fra di loro come KG a GL. Dunque sarà ancora il parallelogrammo GN al parallelogrammo GM, come H ad I. Ma GM è uguale al

supplemento GR, intendendosi compiti i parallelogrammi FOGP, ed FOQR. Dunque sarà benanche il parallelogrammo GN al parallelogrammo GR, come H ad I. Ma il parallelogrammo GN sta al parallelogrammo GR, come il rettangolo KGO al rettangolo QGP (23. *El. VI.*). Dunque sarà ancora il rettangolo KGO al rettangolo QGP nella data ragione di H ad I; e perciò il punto G sarà ad una data iperbole (*prop. VI. por. III.*).

La composizione di questo problema, come ancora quella de' problemi, che sieguono, si tralascia volentieri ai Giovani per loro esercizio (1).

(1) N. B. ADDIZIONE ALLA PROP. VI. DEL III. PORISMA.

Nel primo caso (*Fig. 37. n. 2.*) essendo di uguaglianza la ragione di Q ad R, e gli angoli MLN, ed OIP fra loro conseguenti, allora sarà MI ad IO, come IP ad IN, e con ciò le MI, ed IP prese insieme saranno alle due IO, ed IN, ovvero ad ON, siccome IP ad IN. Ma bisecata la PM nel punto X, è chiaro, che il punto X ne toccherà la XZ data di sito, e parallela alle AB, e GH, e che le due rette MI, ed IP prese insieme ne pareggiano la doppia IX. Adunque sarà ancora la doppia IX ad ON, siccome IP ad IN, ed il rettangolo della doppia IX, e della retta IN sarà uguale al rettangolo della retta IP, e della data retta ON; e perciò il punto I toccherà una data iperbole (*prop. IV. por. I.*).

P R O B L E M A IX.

Dato il punto A (Fig. 104.), e le ragioni che serbano tra loro le rette AB , BC , CD , e DE , delle quali le AB , e CD sieno date di sito , e s' incontrino nel punto F , e la ED faccia angoli dati colla retta DF ; bisogna ritrovare il luogo del punto E , da cui si è tirata la retta in paratesi ED.

Le ragioni delle rette AB , BC , CD , e DE sieno uguali a quelle, che serbino tra loro le date rette G , H , I , e K , ciascuna a ciascuna ; e sia primieramente l'angolo AFD retto. E poichè i quadrati di AF , e di AB sono uguali al doppio rettangolo FAB insieme col quadrato di FB , ed i quadrati di FD , e di DC pareggiano il doppio rettangolo FDC insieme col quadrato di FC (7. El. II.), saranno i quattro quadrati di FA , AB , FD , e DC uguali ai doppj rettangoli FAB , ed FDC una coi quadrati di FB , e di FC , ovvero col quadrato di BC (47. El. I.). Ora può darsi, che il quadrato di BC sia uguale , maggiore , o minore de' quadrati di AB , e di CD presi insieme , secondocchè il quadrato di H è uguale , maggiore , o minore de' quadrati di G , ed I presi insieme. Sia in primo luogo il quadrato di BC uguale ai due quadrati di AB , e di DC. E poichè i doppj rettangoli FAB , ed FDC una col quadrato di BC si sono mostrati uguali ai quattro quadrati di FD ,

DC, FA, ed AB, toltine rispettivamente il quadrato di BC, ed i due quadrati di AB, e di CD, resteranno i doppi rettangoli FDC, ed FAB uguali ai quadrati di FD, e di FA presi insieme: quindi presa nella ED, e fuori dell'angolo NDE la DL per modo, che il doppio rettangolo FDC sia uguale al rettangolo EDL, sarà FD a DL, come ED alla doppia DC, ovvero nella data ragione di K alla doppia I; e perciò il punto L toccherà la retta FL data di sito. Similmente presa la LM nella retta DL, sicchè il rettangolo di FD, ed LM sia uguale al doppio rettangolo di FA, ed AB, sarà ancora FA ad LM, come DE alla doppia AB, che per ipotesi è uguale alla ragione di K alla doppia G, vale a dire in una data ragione; e perciò la LM sarà data di grandezza al pari, che la FA, ed il punto M toccherà la retta MN data di sito, e parallela ad FL, e tutto il rettangolo EDM sarà uguale ai doppi rettangoli FDC, ed FAB presi insieme: onde al pari di questi sarà il rettangolo EDM uguale a' quadrati di FD, e di FA presi insieme. Ma prodotta la MN, finchè incontri la DF nel punto N, sarà data la ragione di DM a DN, ovvero quella del rettangolo EDM al rettangolo EDN (1. El. VI.). Dunque nella data ragione di DM a DN saranno ancora i quadrati di DF, e di FA presi insieme al rettangolo EDN, e compiti i parallelogrammi DO, e DP, anche i quadrati di EO, e di FA presi insieme saranno al rettangolo DEP nella data ra-

gione di DM a DN ; e perciò il punto E toccherà una data sezione conica (*prop. III. por. V.*).

Sia in secondò luogo (*Fig. 105.*) il quadrato di BC maggiore de' quadrati di AB, e di CD presi insieme, e l' eccesso siane il quadrato di EQ, che serberà al quadrato di ED, com' è chiaro, una ragione data, che pongasi uguale a quella di K ad R. E poichè i doppij rettangoli FDC, ed FAB una col quadrato di BG si son mostrati uguali ai quattro quadrati di FD, DC, FA, ed AB, toltine di comune i quadrati di CD, e di AB, resteranno i doppij rettangoli FDC, ed FAB una col quadrato di EQ uguali ai quadrati di FD, e di FA presi insieme: quindi presa nella ED, e fuori dell' angolo NDE la DL per modo, che il doppio rettangolo FDC stia al rettangolo EDL nella ragione del quadrato di EQ al quadrato di ED, ossia nella data ragione di K ad R, sarà anche data la ragione di FD a DL per esserne data la ragione della doppia CD a DE, e con ciò il punto L ne toccherà la retta FL data di sito. Similmente presa la LM nella DL per modo, che il doppio rettangolo FAB stiane al rettangolo di ED, ed LM nella data ragione di K ad R, ne sarà data la ragione di FA ad LM, essendone data per costruzione quella della doppia AB ad AD; onde la LM sarà data di grandezza del pari, che la AF, ed il punto M ne toccherà la retta MN data di sito, e parallela ad FL, la quale ne incontri la DF nel punto N. Adunque per la XII.

El. V. saranno i doppij rettangoli FDC, ed FAB una col quadrato di EQ a tutto il rettangolo DEM nella data ragione di K ad R. Ma i doppij rettangoli FDC, ed FAB una col quadrato di EQ si sono mostrati uguali ai quadrati di AF, e di FD, ovvero di EO, intendendosi compito il parallelogrammo DO: dunque sarà ancora il rettangolo DEM al quadrato di EO una col dato quadrato di AF nella data ragione di K ad R; e perciò il punto E toccherà una data sezione conica (*prop. V. por. V.*).

Che se finalmente il quadrato di BC (*Fig. 106.*) sia minore de' quadrati di AB, e di CD presi insieme; in tal caso avremo l' eccesso de' doppij rettangoli FDC, ed FAB sul quadrato di EQ uguale ai quadrati di FD, e di FA pres' insieme, e tolta nella ED, e dentro dell' angolo NDE la DL, come si è detto dianzi, rileveremo per la XIX. El. V: il rettangolo DEM al quadrato di EO insieme col dato quadrato di AF nella data ragione di K ad R; e perciò il punto E ne toccherà ancora una data sezione conica. (*prop. V. por. V.*).

Che se poi l' angolo AFD (*Fig. 107.*) non sia retto, allora si abbassi dal punto A sulla retta DF la perpendicolare AL, che sarà data di sito; e tirata pel punto B la BM parallela a DF, che incontri la AL nel punto M, sarà il triangolo ABM dato di specie; e con ciò saran date le ragioni di AM ad AB, e di AB a BM. Ma per ipo-

tesi n' è data la ragione di AB a BC , ovvero alla sua uguale MN , intendendosi compito il parallelogrammo BN ; dunque saranno anche date le ragioni di AM ad MN , e di MN ad MB , o alla sua uguale NC : ed essendo per ipotesi data la ragione di CB , ovvero di MN a CD , sarà ancora data la ragione di NC a CD ; e con ciò la ragione di NC ad ND . Ma è data la ragione di NM ad NC ; dunque ne sarà anche data la ragione di NM ad ND . Similmente si dimostra esser data la ragione di ND a DE . Laonde pel caso precedente il punto E ne toccherà ancora una data sezione conica.

P R O B L E M A X.

Data di sito, e di grandezza la base (Fig. 108.) AB del trapezio $ABCD$, i di cui lati AD , e BC concorrano nel punto E della circonferenza del dato cerchio EFG , e l'estremo C dell'altra base CD parallela ad AB ne tocchi la retta CH data di sito, ed inclinata ad AB ; bisogna rinvenire il luogo dell'altro estremo D di detta base.

Si tiri dal punto E la retta EI parallela alla retta CH data di sito, e dal centro L del cerchio EFG conducansi le rette LK , ed LM parallele rispettivamente alle AB , ed EI . E poichè son simili i triangoli EIB , e CHB , sarà EI a CH , come EB a BC . Ma a cagione della retta

AB parallela a CD sta EB a BC, come EA ad AD, e tirata la AN parallela ad EC sta EA ad AD, siccome CN ad ND : dunque in questa ragione sarà ancora EI a CH, ovvero alla sua uguale ON, intendendosi compito il parallelogrammo NOHC, il di cui lato NO è dato di sito per esserne AO uguale alla data BH. Così pure troveremo IB a BH, o alla sua uguale AO, siccome CN ad ND. Ciò posto, prendansi le NP, ed AQ, cui stiano le date rette LM, ed MB nella ragione di CN ad ND, sarà PN ad ND nella data ragione di LM a CN, ed AQ a DN anche nella ragion data di MB a CN. Ma essendo LM, o la sua uguale KI ad NP, siccome CN ad ND, ovvero siccome EI ad ON, sarà EK a PO, come CN ad ND; e per la stessa ragione sarà pure KL a QO, come CN ad ND. Dunque avremo EK a PO, come KL a QO. Ma è poi l'angolo EKL uguale all'angolo POQ per essere i lati dell'uno paralleli rispettivamente ai lati dell'altro : dunque i due triangoli EKL, e POQ saranno simili tra loro, e sarà EL a PQ, come EK a PO, ovvero come CN ad ND; ed invertendo, e permutando avremo ancora PQ ad ND nella ragion data di EL a CN. Laonde le rette AQ, QP, e PN serbano ragioni date alla retta in paratesi DN; e le ascisse AQ, e PN sono nelle rette AO, ed ON date di sito, e l'ascissa AQ n'è presa dal punto A in sulla data retta AO. Adunque il luogo del punto D si troverà per lo problema precedente.

P R O B L E M A XI.

Date due curve coniche, di cui A, e B (Fig. 109.) ne sieno i fuochi, fa d' uopo tirare ad esse una tangente comune.

Suppongasi effettuato il problema, e siane CD la tangente richiesta: sarà chiaro, che abbassate dai fuochi A, e B le AC, e BD perpendicolari a CD, i punti C, e D toccheranno due rette date di sito, se mai le date curve coniche sieno ambedue parabole; ed essendo una di esse parabola, e l'altra ellisse, ovvero iperbole, allora uno de' detti punti toccherà una data retta, e l'altro una data circonferenza di cerchio, e toccheranno finalmente due date circonferenze di cerchio, se mai le proposte curve sieno ambedue ellissi, o ambedue iperboli, ovvero una ellisse, e l'altra iperbole. Per brevità poniamo solamente, che ne tocchino le date circonferenze de' cerchi CE, e DF, e bisecata la AB nel punto G, si congiungano le CG, e DG, delle quali la CG si prolunghi, finchè incontri la DB nel punto H. E poichè è retto l'angolo CDH, saranno uguali le tre rette CG, GD, e GH; e quindi il punto H ne toccherà un luogo piano della stessa specie di quello, che ne tocca il punto C; vale a dire toccherà ancora una data circonferenza di cerchio, che supponiamo essere la HI. Inoltre si abbassino le rette GK, ed AL dai punti G, ed

A perpendicolari a DH ; sarà DK uguale a KH, BK uguale a KL , e con ciò DB uguale ad LH, e DL uguale a BH : indi dai punti F, ed I, ove la retta DH ne sega i cerchi DF, ed HI si tirino le FM , ed IN perpendicolari ad AB. E poichè i due triangoli rettangoli INB , ed ABL hanno di comune l'angolo acuto B, sarà (4. El. VI.) IB a BN , come AB a BL , e con ciò sarà il rettangolo IBL uguale al rettangolo ABN ; e presa la BO per modo , che il rettangolo ABO sia uguale al dato rettangolo IBH , sarà BO data di grandezza , ed il rettangolo IBL al rettangolo IBH , come il rettangolo ABN al rettangolo ABO ; vale a dire (1. El. VI.) sarà BL a BH , come BN a BO. Similmente presa la BP per modo , che il dato rettangolo FBD sia uguale al rettangolo delle rette AB, e BP, sarà BP data di grandezza al pari di AB, e si rileverà nello stesso modo, che stia BL a BD , come BM a BP : quindi sarà BL a DL, o alla sua uguale BH, siccome BM ad MP. Ma si è dimostrato BL a BH , come BN a BO ; dunque sarà ancora BM ad MP, come BN a BO , e permutando BM a BN , come MP a BO. Or si prenda PQ uguale alla data retta BO , e dal dato punto Q si innalzi QR perpendicolare a BQ, e si congiunga la retta FP, la quale si prolunghi , finchè incontri la retta QR nel punto R , sarà pei triangoli simili FMP , e PQR, MP a PQ , come FM a QR , e per gli altri triangoli simili FMB, e BNI MB a BN ,

come FM ad NI : dunque essendosi mostrate uguali le prime ragioni di queste analogie, saranno ancora uguali le seconde, vale a dire avremo FM a QR, come la stessa FM ad NI; e con ciò sarà QR uguale ad NI, la congiunta RI parallela alla retta BQ, e la figura PBIR un trapezio. Ma la base BP del trapezio PBIR n'è data, i lati RP, ed IB concorrono nel punto F della periferia del dato cerchio DF, e l'estremo R dell'altra base RI parallela a BP ne tocca la data retta QR inclinata alla base BP; dunque l'altro estremo I per lo problema precedente sarà ad una data sezione conica; ma n'è ancora alla data circonferenza del cerchio HI. Dunque il punto I sarà dato.

P R O B L E M A XII.

Descrivere una piramide triangolare, di cui sia data la base, e gli angoli al vertice.

Suppongasi effettuato il problema (Fig. 110.), e sia ABCD la piramide richiesta, di cui il triangolo ABC sia la data base, ed ADB, BDC, e CDA i dati angoli al vertice, sarà dato di magnitudine l'angolo solido D da essi compreso: e posto, che nel piano dell'angolo ADB sia data di sito la retta AB, che per ipotesi è anche data di grandezza, sarà chiaro, che il vertice D della piramide ne tocca la circonferenza della data porzione di cerchio ADB descritta sulla data retta

AB, e capiente il dato angolo ADB. Ma essendo dato il triangolo ACB, la sua altezza CE sarà data di magnitudine, ed il punto E dato di sito, d'onde tirata nel piano ADB la EF perpendicolare ad AB, sarà benanche la EF data di sito, ed intendendosi abbassata dal punto C la CF perpendicolare ad EF, sarà CF perpendicolare al piano ADB, ed il piano delle rette FC, e CD sarà ancora perpendicolare allo stesso piano ADB. Ma questi due piani sono dati a cagione del dato angolo solido D: dunque sarà data di sito la di loro comune sezione DF, e con ciò saranno dati gli angoli ADF, ed FDC, e dato l'arco AG, su cui ne insiste l'angolo ADF, ed il punto G sarà dato di sito, ed il triangolo rettangolo CFD dato di specie; onde sarà data la ragione del quadrato di CF al quadrato di FD, che pongasi uguale a quella delle date rette H, ed I. Per la qual cosa prese nella retta FE d' ambe le parti del dato punto E le EK, ed EL uguali ciascuna alla data retta CE, saran dati di sito i punti K, ed L, ed il rettangolo KFL sarà uguale alla differenza de' quadrati di EF, e di EL, ovvero di EC, cioè al quadrato di FC; onde al pari di questo sarà benanche il rettangolo KFL al quadrato di FD nella data ragione di H ad I. Ciò posto, si uniscano le rette GK, e GL, che seghino la circonferenza del cerchio ne' dati punti M, ed N, e dal punto D si tirino sulle date rette GM, e GN le DP, e DO parallele.

alla data retta KL. E poichè la ragione del rettangolo KFL al quadrato di FD componesi dalle ragioni del rettangolo KFL al quadrato di FG, e del quadrato di FG al quadrato di FD, ovvero dall'e loro uguali, cioè dalle ragioni del rettangolo PDO al quadrato di DG, e del quadrato di GK al quadrato di KP, sarà benanche H ad I in ragion composta del rettangolo PDO al quadrato di DG, e del quadrato di GK al quadrato di KP. Ma condotte dal punto D sulle GM, e GN le DR, e DS, parallele alla congiunta MN ch'è data di sito, ed incontra la GD in un punto Q, sarà chiaro, che il rettangolo PDO stia al quadrato di DG in ragion composta del rettangolo PDO al rettangolo RDS, e del rettangolo RDS al quadrato di DG, delle quali ragioni la prima n'è data pe' triangoli dati di specie DPR, e DOS, che pongasi uguale a quella delle date rette GM, e T, e la seconda ne pareggia la ragione del rettangolo MQN, o del suo uguale DQG al quadrato di QG, cioè alla ragione di DQ a QG, ovvero di RM ad MG. Adunque sarà pure il rettangolo PDO al quadrato di DG in ragion composta di RM ad MG, e di MG a T, cioè come RM a T. Ma si è dimostrato dianzi essere H ad I in ragion composta del rettangolo PDO al quadrato di DG, e del quadrato di GK al quadrato di KP. Dunque sarà ancora H ad I in ragion composta di RM a T, e del quadrato di GK al quadrato di KP, e po-

nendosi il quadrato di GK uguale al rettangolo delle rette T, e V, sarà H ad I in ragion composta di RM a T, e del rettangolo TV al quadrato di KP, vale a dire come il parallelepipedo, che ha per base il rettangolo RMV, e per altezza la retta T al parallelepipedo, che ha per base il quadrato di KP, e per altezza la stessa retta T, ossia come il rettangolo RMV al quadrato di KP; e compiti i parallelogrammi RU, e PX, sarà H ad I, come il rettangolo UDV al quadrato di DX; e perciò il punto D sarà ad una data parabola (*Scol. prop. II. Por. I.*); ma n' è ancora alla data circonferenza del cerchio ADB. Dunque il punto D sarà dato.

S C O L I O.

L'Illustre Signor Monge volendo risolvere questo problema nella sua Geometria descrittiva, prese a tal uopo la data base della richiesta piramide per piano di proiezione orizzontale, o ch' è lo stesso, suppose dati di sito tutti, e tre i lati di detta base, che per le condizioni del problema debbono essere solamente dati di grandezza: quindi perchè il Valentuomo si avvide, che i tre dati angoli al vertice della piramide son compresi da tre superficie di rivoluzione, generate da tre segmenti di cerchio descritti su i corrispondenti lati della base di essa, e capienti quegli angoli dati; perciò ne conchiuse, che il vertice della

piramide sia un punto della comune intersezione di dette superficie. Intanto per esibire un tal punto fu costretto a descrivere su i piani coordinati le proiezioni orizzontali, e verticali di quelle linee, in cui s' intersecano le divisate superficie prese a due a due, affinchè per tal modo si ottengano quei punti, ove tutte, e tre insieme le dette proiezioni s' intersecano, e che sono i punti soddisfacenti al problema. Ma quì siemi lecito di riflettere, ch' egli avendo supposto dati di sito tutti, e tre i lati della base della piramide, non potè di poi tener conto dell' angolo solido costituito dai tre dati angoli al vertice di essa, che l'è un dato geometrico facilissimo, e che nasce immediatamente dai dati del problema, per cui non solo dovè ricorrere a' *luoghi alle superficie*, che ne comprendono i detti angoli, e son generati da' quei segmenti di cerchio, un solo de' quali combinato con una data parabola basta, come abbiamo veduto, a determinare il punto in quistione, ma ancora dovè ricorrere a' *luoghi lineari*, ossia a quelle proiezioni orizzontali, e verticali, ch'ei fu obbligato a descrivere su' piani coordinati per assegnazione di punti: i quali luoghi quanto n' eccedano la natura del problema si rileverà di leggieri dalle loro varie, e molteplici ramificazioni, che si potran vedere delineate con molta esattezza presso il Signor Hachette nel *supplemento della Geometria descrittiva*; di maniera che non dee recar meraviglia, se il Signor

Monge in virtù di cotesti luoghi sì eccedenti ne avesse fatto montare un tal problema al sessantaquattresimo grado, mentre ei non è, che di quarto: la qual cosa invero non è da riputarsi un piccolo difetto secondo gli Antichi. Dappoichè se essi giudicarono saggiamente non esser lieve colpa in Geometria il risolversi un problema piano per mezzo de' luoghi solidi, qual colpa poi non dovean riputare esser quella di risolvere un problema solido come questo mediante i luoghi lineari, che da quelli ne dipendono alle superficie? Certamente la pratica istessa ne anche vi guadagnerà molto in questo modo, qualora tanto si discosti dalla natura del soggetto. Infatti qual vantaggio si potrà mai ottenere da quelle molteplici assegnazioni di punti, che oltre ad essere molestissime, e soggette all'imperfezion degli istromenti, ed a mille aberrazioni di mano, il più delle volte ne dipendono dalla sola prudenza di chi l'esegue! Al contrario esse non si posson mica paragonare con quella facilissima, e sicura descrizione di una parabola nel piano, cui si è ridotto un tal problema secondo il metodo degli Antichi; che anzi volendolo ridurre ad una operazione anche più comoda, basterà invece della parabola il rinvenirvi l'iperbole tra gli assintoti; ed allora il punto in quistione si verrà ad assegnare mediante il moto semplicissimo di una riga intorno ad un punto fisso (*Scol. prob. VI.*): tanto si renderà facile, e spedita la pratica, allor che

essa dalla vera , e giusta teoria si derivi ! Del rimanente , se questo problema è stato molto tormentoso ai Geometri descrittivi , non lo è stato meno agli Analisti , che a tutta lor possa si sono impegnati a volerlo risolvere col metodo de' Moderni. Infatti lo stesso Signor Monge , che per non aver tenuto conto del dato angolo al vertice della piramide avea detto dover montare l'equazione di cotesto problema al sessantaquattresimo grado , non tralasciò di fare tutti gli sforzi per abbassarla al più ch' era possibile ; e certamente dovè restare assai pago , allorchè (1) ei prese per incognite i tre lati della richiesta piramide , e stabilite tra questi lati , e quei delle base tre equazioni di secondo grado per un ovvio principio di Trigonometria rettilinea si avvide , che l' eliminata di esse non eccedeane l' ottavo grado , come già erasi anteriormente rilevato da un nostro Geometra (2). E sebbene questa equazione difficilmente si potea esibire pe' l gran numero de' termini , che vi emergono , pure sembrò non piccolo guadagno , trattandosi di un problema credutosi ormai superiore alle forze dell' Algebra comune ; tanto più che malgrado i conati degli altri Analisti Francesi niuno di essi potè mal

(1) Vedi la Geometria descrittiva di Monge anno 1811.

(2) Vedi la Geometria descrittiva del nostro Flauti edizione di Roma. anno 1807.

uscire dall' equazione di ottavo grado , quantunque a tal uopo si fosse anche ricorso alle formole , che per questa specie di problemi sulla piramide triangolare furon proposte dal sommo Signor De la Grange nelle memorie dell' Accademia di Berlino per l' anno 1773 (1). Era però serbato all' Illustre Signor Lhuillier di rilevare per mezzo dell'Algebra il vero grado del problema (2); poichè egli a tal uopo suppose già formato l'angolo solido da i tre dati angoli al vertice della piramide in quistione , e con geometrico ripiegò da un punto preso ad arbitrio in un lato di essa vi condusse un piano parallelo alla base , prendendo per incognite le parti degli altri due lati di detta piramide, ch'ei ne ascinde dal vertice : quindi calcolando i quadrati de' lati di questa sezione per gli ovvj principj della Trigonometria, e proporzionandoli a quelli della data base della piramide , ne ottenne due equazioni a due luoghi solidi , in vero molto eleganti , e simmetriche , le quali potendosi costruire geometricamente, ed in facil modo , ne danno la soluzione del problema. Se non che volendo , come è debito , combinare un luogo piano con un luogo solido , allora si

(1) Vedi la Geometria descrittiva del Signor Lacroix pag. 85. II. edizione.

(2) Vedi la Geometria di sito del Signor Flauti II. edizione.

dovrebbe eliminare una delle due incognite , come avverte egli stesso , affinchè per tal modo otten-
gasi l'eliminata di quarto grado , la quale poi si
dovrebbe ancora costruire alla maniera Cartesiana,
perchè ne resti il problema col cerchio , e colla
parabola convenevolmente risoluto. Ma chi non vede
quanto sia laboriosa , e quasi da non potersi ese-
guire una tal costruzione, montando quella elimi-
nata a cento , e più termini ? Mentre sappiamo
d'altronde , che il celebre Signor Lexel per co-
struire solamente due termini di quella equazione
di secondo grado , che il Signor Lagrange trasse
dal problema de' tre punti, v'impiegò 14. pagine di
un volume in 4.^o. Ora quante non se ne dovrebbero
impiegare volendosi costruire quella equazione bi-
quadratica , che si trarrebbe secondo Lhuillier dal
problema della piramide , i di cui termini oltre-
passano il centinaio ? Ma questo inconveniente
al certo non vi sarebbe , se quelle prime equa-
zioni per altro elegantissime , non fossero en-
trambe ai luoghi solidi. Si desiderava intanto per
decoro della moderna Analisi una altra soluzio-
ne del problema , che si fosse condotta coi puri
principj dell'algebra comune , e che non im-
pegnasse all'eliminazione. Or questo appunto è
stato egregiamente eseguito da un valentissimo
giovane di nostra scuola , il Professore D. Luca
Maresca nella sua eccellente soluzione commu-
nicatami dal medesimo fin dall'anno 1822. Ivi
questo nostro Analista , che ebbe la sorte di

essere istituito con molta lode ne' metodi sublimi de' Moderni dall' immortal Fergola , suppone anche dato l'angolo solido costituito da i tre dati angoli al vertice della richiesta piramide , e senza tirare alcun piano parallelo alla base , come il Signor Lhuillier , pone uguali ad x , ed y due lati della detta piramide , i quali col lato corrispondente della data base di essa gli offrono la prima equazione per gli ovvii principj della Trigonometria rettilinea : quindi prende in funzioni di x , ed y i seni , ed i coseni di quegli angoli , che il rimanente lato della piramide forma coi rimanenti lati della base : e perchè queste tre rette formano un angolo solido , di cui ne son dati due piani , per ciò cglì accortamente vi stabilisce l'espressione del coseno della loro inclinazione per le note formole della Trigonometria sferica. E così ottiene insieme colla prima due equazioni , in cui sostituendo in luogo di x^2 , ed y^2 due nuove incognite z , ed u , viene ad averne due altre , le quali benchè sieno alquanto più onuste di termini di quelle del Signor Lhuillier , pure non impegnano mica all'eliminazione , essendo una di esse al cerchio , e l'altra all'iperbole tra gli assintoti : e sebbene volendole costruire , vi si darebbe non piccola fatica , pure questo non è colpa di lui , ma dell'arte , che necessariamente ne mena in questo laberinto della costruzione geometrica dell'equazioni algebriche , a differenza

del metodo degli Antichi, in cui basta, che ne' proposti problemi si esprimano convenevolmente le condizioni locali de' loro punti di riduzione mediante i rapporti delle rette in paratesi; perchè poi il tutto ne resti egregiamente eseguito senza più fare. Imperciocchè le rette in paratesi non si debbono restringere alle sole x , ed y , come usan fare i Moderni, nè i loro rapporti si debbono tradurre in equazioni, o queste poi maneggiarsi, e costruirsi altrimenti; mentre quelli si riducono ai precedenti porismi; i quali perchè contengono tutti i rapporti di coteste rette, che nella risoluzione de' proposti problemi potranno mai emergere dallo sviluppo delle condizioni locali de' loro punti di riduzione; perciò essi sono a guisa di tanti generi, che ne comprendono, come altrettante di loro specie, i particolari problemi, e molto più le particolari equazioni, in cui si riducono nel metodo de' Moderni: vale a dire non si debbono ridurre i problemi alle specie, come pur troppo son costretti a fare i Moderni, ma bensì si riducono a' generi, per cui si vengono ad evitare in questo modo i tre grandi scogli, che s'incontrano nel Metodo de' Moderni, *la riduzione, cioè, de' problemi in equazioni, la costruzione geometrica di esse, e la di loro eliminazione*, siccome si è già dimostrato nel decorso di questa opera, e si è anche veduto col fatto negli esposti problemi, e si potrebbe ancora vedere in tutti quegli altri pro-

blemi solidi , che si potran mai proporre , mentre essi o si riducono immediatamente a' porismi , che si sono già spiegati nella seconda Parte , ovvero ad altri problemi , che in ultima analisi a quelli eziandio si riducono : che anzi volendoli estendere ad un maggior numero di rette in paratesi , sviluppandone a tal uopo que' *luoghi a più di quattro linee* indicate da Pappo (*Par. I. §. 20.*) , si ridurranno ancora ad essi nello stesso modo i problemi lineari , o siano quelli , che n' eccedono il quarto grado. Nel che certamente non si ammirerà mai abbastanza la sapienza degli Antichi.

F I N E.

610770

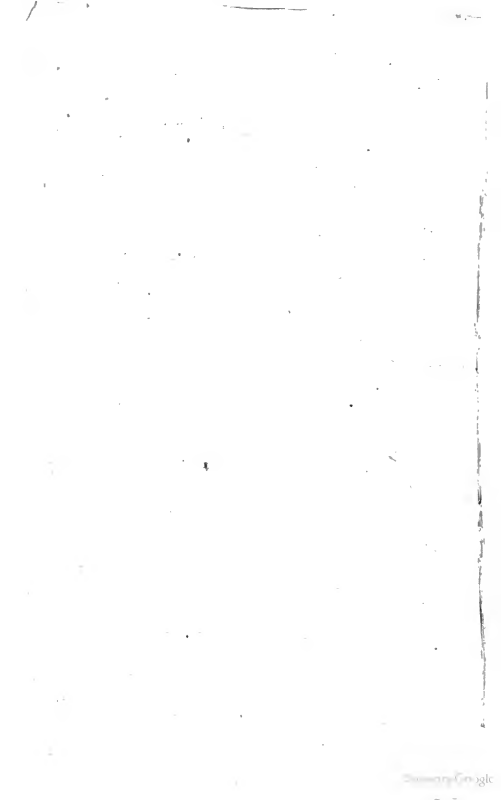


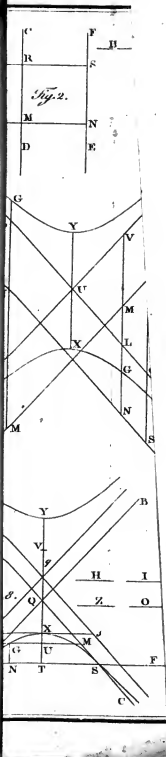
ERRORI.

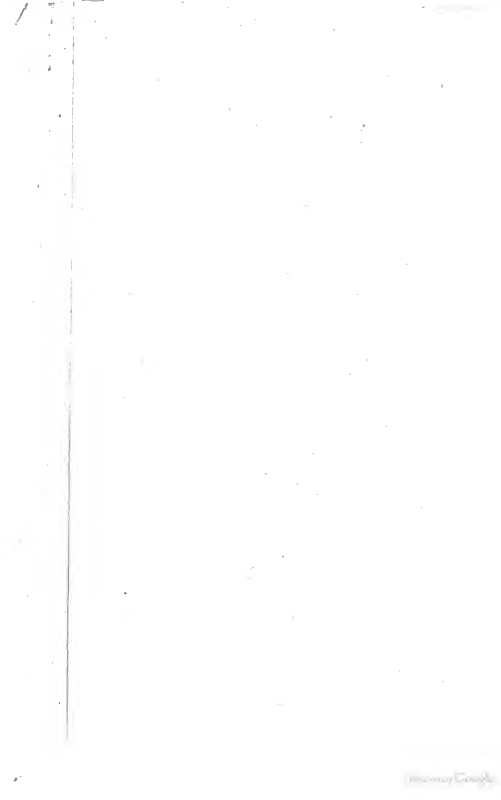
CORREZIONI.

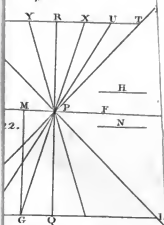
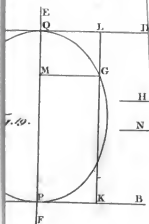
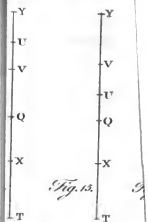
Pag. ver.

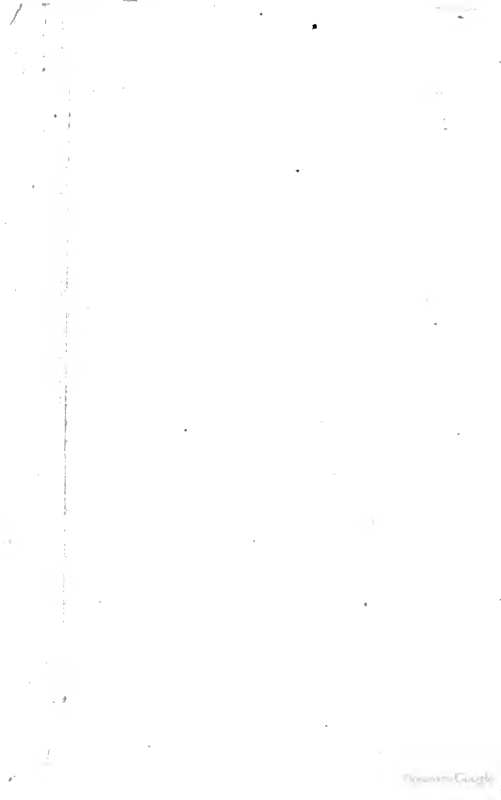
17.	12.	anastrofici delle linee	diexodici delle linee
67.	12.	la retta TS per diametro	la retta TS per diametro, di cui la retta Q sia il parametro
79.	14.	V, ed X	V, e Q
<i>Idem</i>	22.	(5. <i>EL. II.</i>)	(6. <i>EL. II.</i>)
109.	22.	Kh	Kh
174.	15.	del quadrato di I	del quadrato di H
238.	3.	(<i>Fig. 94.</i>)	(<i>Fig. 96.</i>)

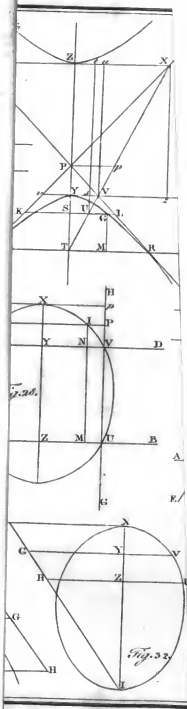












—

L

R

A M

Fig. 33

Y

I

P

X

M

E

B

A





64.

П

Р

Н

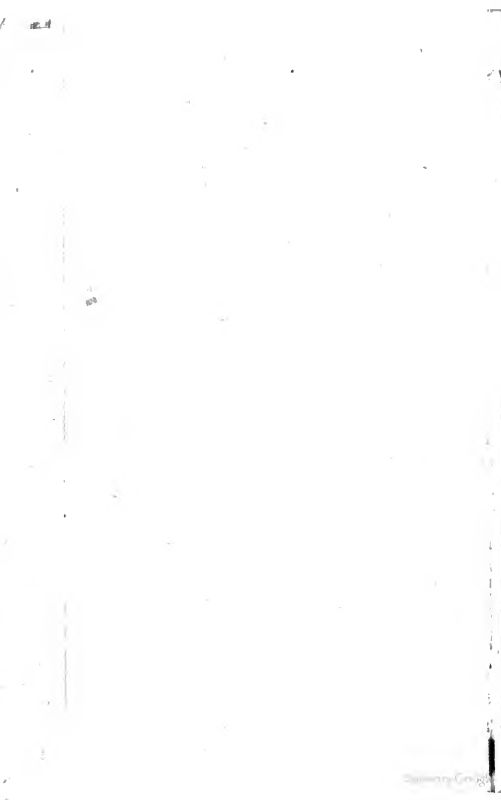
Тя

В

Н

Р

А



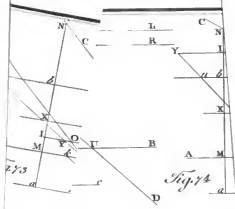


Fig. 74

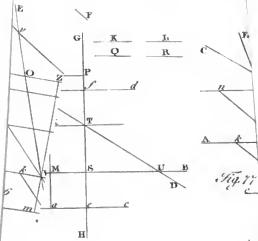
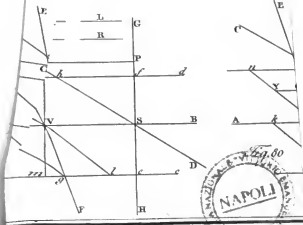
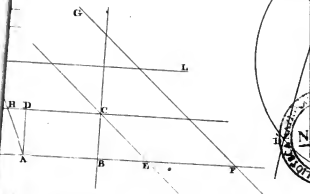
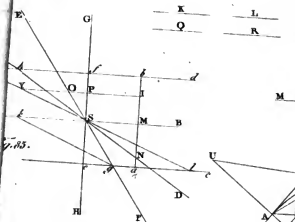
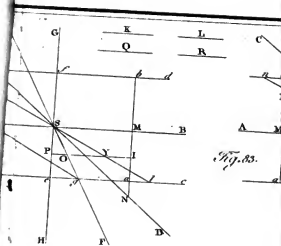
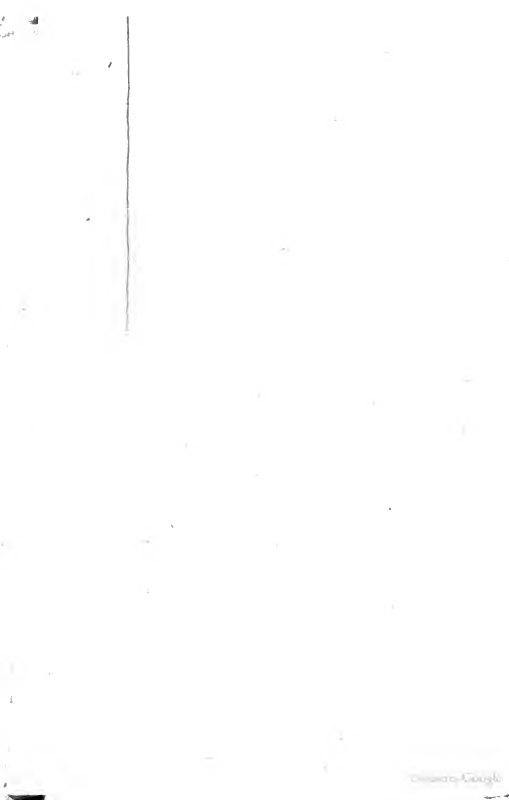


Fig. 75









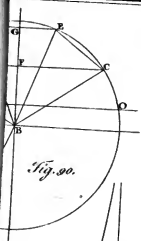


Fig. 90.

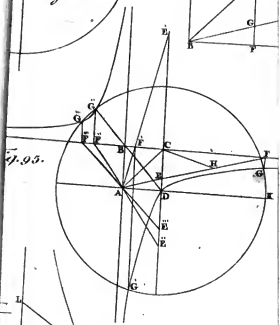
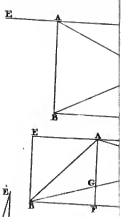


Fig. 93.

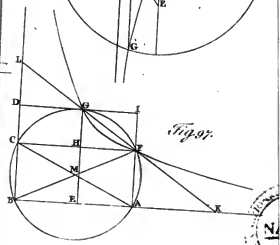
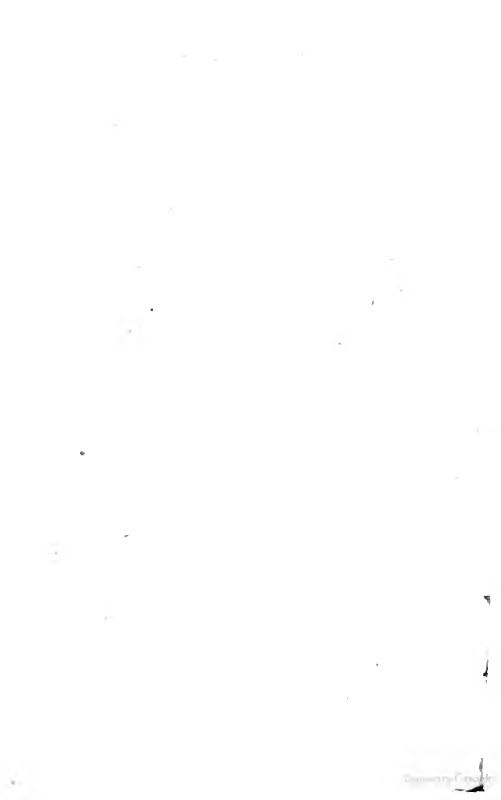


Fig. 97.





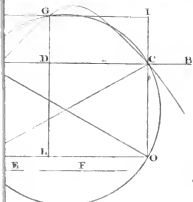


Fig. 101.

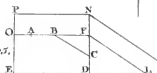


Fig. 103.

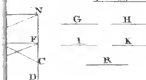


Fig. 107.

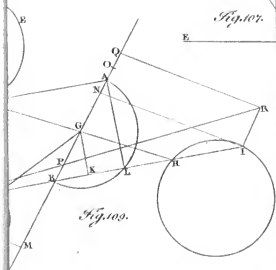


Fig. 109.

